

電磁気学の基本概念

-電流は電荷の移動-

富永 昭

目次

1. さまざまな電磁気現象	7
1.1 電気磁気の語源	7
1.2 クーロンの法則：力学の影響	8
1.3 電流	11
1.3.1 ボルタの電堆	11
1.3.2 エルステッド：電流の磁気作用	11
1.3.3 アンペールの法則、アンペール力、ビオ・サバールの法則	12
1.3.4 磁気回転の実験と単極モーター	13
1.3.5 アンペールの電磁気学	16
1.4 電磁誘導	16
1.5 電磁気学と熱力学：二大現象論	19
1.6 空洞放射：二大現象論の深淵	22
1.7 電流は基本概念：力学の影響	23
2. ファラデーの力線イメージ	25
2.1 力線と力管	25
2.2 電気力線と磁力線	25
2.3 遠隔作用論と近接作用論	29
2.4 電磁誘導の力線概念	29
3. マクスウェルの電磁気学	31
3.1 静電磁気学	31
3.1.1 電束密度と電荷の関係	31
3.1.2 磁束密度	33
3.1.3 アンペールの法則	35

3.1.4 電磁場のエネルギー	37
3.1.5 静電磁気学に関わる物理量の単位	39
3.2 動電磁気学	40
3.2.1 電荷保存則	40
3.2.2 ファラデー・マクスウェルの式	41
3.2.3 アンペール・マクスウェルの式	42
3.2.4 電磁波.....	43
3.3 ポインティングベクトル	45
3.4 表皮効果の定式化：マクスウェルの電磁気学の応用例	46
3.5 マクスウェルの電磁気学の問題点	52
4. 運動物体の電磁気学	54
4.1 電流は電荷の移動	54
4.1.1 ローラントの実験	54
4.1.2 ホール効果	54
4.1.3 アンペール力の新表現.....	55
4.2 マイケルソン・モーリーの実験：光速は不変	55
4.3 レントゲンの実験：レントゲン電流.....	56
4.4 座標変換の視点	58
4.4.1 ヘルツ理論	58
4.4.2 アイヒェンヴァルトの実験.....	60
4.4.3 ウィルソンの実験	61
4.4.4 ローレンツ変換.....	62
4.5 電磁場の座標変換	63
4.5.1 電石の座標変換.....	63

4.5.2 磁石の座標変換.....	65
4.5.3 電石と磁石の重ね合わせの座標変換	66
4.5.4 単極誘導と単極モーター	70
4.5.5 ローレンツ力：磁束密度の座標変換.....	71
4.5.6 電流の磁気作用：電束密度の座標変換.....	72
4.5.7 光速不変と電荷不変	72
4.5.8 アンペール力：クーロン力の座標変換.....	74
4.6 まとめ.....	76
5. 時間・空間の座標変換	78
5.1 ガリレイ変換：線形変換の一つ.....	78
5.2 ローレンツ変換.....	79
5.2.1 光速不変な線形変換	79
5.2.2 ローレンツ収縮と時間の遅れ.....	81
5.3 特殊相対性理論.....	83

電流の磁気作用の発見（1820年）までは、電荷と磁荷を基本概念とする逆二乗則（クーロンの法則）が基本法則だった。逆二乗則はニュートンの万有引力からの類推です。

電磁気現象の理解が飛躍的に進んだのは19世紀のことです。エールステッドによる電流の磁気作用の発見に始まり、アンペールの法則（右ネジの法則）、アンペール力、ファラデーの力線イメージ、ファラデーの電磁誘導や単極誘導と続いた。

電流と磁場との密接な関係が判明するにつれて、磁荷の代わりに電流を基本概念とするようになり、「電流とは何か？」との問題が発生した。

アンペールやファラデーも「電流は電荷の移動」としたが、「電流は電荷の移動」は容認し難いことだった。「電流は電荷の移動」を認めるとアンペール力は電荷の移動速度に依存する力となり、移動速度に依存する力はポテンシャル力だけをまともな力とするニュートン力学の対象外となるからです。

電荷と電流を独立な基本概念とする代わりに、アンペール力は電流に纏わり付く磁場が介在する力となった。

マクスウェルは、師ファラデーの力線イメージに解析学的表現を与えて静電磁気学を完成し（1861年）、マクスウェルの動電磁気学を完成させた（1867年）際に電荷保存則を導入した。電荷保存則を導入したマクスウェルも「電流は電荷の移動」を容認したことになる。マクスウェルの電磁気学の最大の成果は光速 c で伝わる電磁波を予言したことです。ヘルツは電磁波の存在と電磁波が光と同じであることを実験で示した（1886-88年）。

マクスウェルの電磁気学の輝かしい成果にもかかわらず、電磁気学と力学との関係に関わる三つの基本的問題が19世紀末まで続いた。

第一は、電荷と電流とは独立な基本概念なのか、それとも、「電流は電荷の移動」なのかという問題です。「電流は電荷の移動」では電荷と電流とは関係概念です。

第二にマクスウェルの電磁気学では単極誘導を議論できない。単極誘導を電磁気現象の対象から除外するか、電磁気学の再構成を図るかのどちらかが必要です。

第三に、マイケルソンモーリーの実験（1887年）によれば、光速は地球の自転や公転の影響を受けない。

これらの問題を解く鍵は相対速度が一定の二つの座標系の間での座標変換にあると看破したヘルツは、電磁気現象を議論した（1890年）。これが、座標変換の物理の

始まりです。ヘルツが使った座標変換はニュートン力学で当然とされたガリレイ変換だったが、光速が不変となる座標変換はローレンツ変換です。

ローレンツ変換ではローレンツ収縮と時間の遅れ（あるいは寿命の伸び）を伴う。電荷もローレンツ変換に対して不変です。「電流は電荷の移動」との視点を受け容れローレンツ変換を使うと、電流の磁気作用、アンペールの法則（右ネジの法則）、ローレンツ力、単極誘導などはローレンツ変換の古典的極限として理解出来る。電磁気現象に適した座標変換はローレンツ変換です。電流の流れている導体間に働くアンペール力は、磁場の仲介なしに、クーロン力のローレンツ変換の古典的極限です。「電流は電荷の移動」が容認されるには座標変換の物理が必要だったので

す。

相対性原理を主張したアインシュタインはニュートン力学と電磁気学とで座標変換を使い分けることを許せなかった。アインシュタインの特殊相対性理論（1905年）では、ニュートン力学をローレンツ変換に従うように拡張した。静止質量 m と静止エネルギー $E \equiv mc^2$ とを導入し、ローレンツ変換により、質量は γm となり、運動量は $\gamma m v$ 、エネルギーは γE となるとした。ここで、 $\gamma \geq 1$ はローレンツ因子です。古典的極限 $\gamma \rightarrow 1$ では、静止エネルギー E を除けばニュートン力学と同じです。古典的極限では

$$\gamma - 1 \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2$$

に注意すると、運動エネルギー $\gamma E - E = (\gamma - 1)E$ は古典的極限 $\gamma \rightarrow 1$ では

$$\frac{1}{2} m v^2$$

に等しい。ニュートン力学は特殊相対性理論の古典的極限 $\gamma \rightarrow 1$ に相当する。

現代の中等教育は特殊相対性理論の直前にまで迫っていることになる。「電流は電荷の移動」と教えられ、中学校では「電流の流れている導体間に働くアンペール力」を形式的に学ぶ。ローレンツ力の古典的極限は、電磁場中での荷電粒子の運動を理解することを目指して、高等学校でも学習する。

1. さまざまな電磁気現象

1.1 電気磁気の語源

電磁気の「気」は姿形がよく判らないものや得体の知れないものを意味する。天気、空気、気体、病気、元気、気配、雰囲気の気です。人類は電磁気現象というつかみ所のない現象にも興味を示してきた。

電磁気学の歴史は古い。光は人類の出現と同時に知られていただろう。

磁気に関わる現象は古代から人々の関心の的だった。古代ギリシャの遊牧民が方位磁針を使ったとの話もある。英語のmagneticには「人を惹きつける、魅力のある」の意味もある。磁気の語源は、恐らく、磁鉄鉱 (magnetite) にある。磁鉄鉱は鉄の原料として、鉄器文化が始まった頃に重要な鉱物資源だっただろう。

摩擦によって琥珀が帯電することは紀元前600年頃ギリシャの哲学者タレスが発見したと言われている。摩擦電気や磁気現象について研究したギルバート (W.Gilbert、1544-1603年) は琥珀 (amber) のギリシャ語ηλεκτρονに因んで、初めてelectricという用語を用いた。因みにηλεκτρονをアルファベットに対応させるとelectronになる。なお、現代では英語electronは、琥珀 (amber) ではなく、電子を指す。1600年に刊行されたギルバートの著書『磁石、磁性体、そして大磁石たる地球について、多くの論述と実験とで論証された新哲学』 (De magnetibus, magneticisque corporibus, et de magno magnetis tellure; physiologia nova, plurimis arugumetis, experimentis demonstrata) に対して同時代のガリレイ (G.Galilei、1564-1642年) は最大級の賛辞を呈した。書名からは地球を大きな磁石とする見方が16世紀には確立していたことが判る。

静電気の研究を行ったグレイ (S.Gray、1666頃-1736年) は導体と不導体とを区別したことで知られている。更に、グレイは電気現象に関わるのは物体の表面だけであることを発見した。グレイ以前には曖昧だった電気と熱との区別がはっきりした。熱は物体の内部を伝わり電気は物体の表面に存在することにより、熱と電気とは異なる概念となった。こうして1730年代には、電気が物体の表面に存在することと摩擦電気には正負二種が存在することが知られた。

18世紀は流体の時代とも呼ばれ、質量保存則との類推で、さまざまな保存則がイメージされた。質量保存則が質量と質量流とを関係概念としたように、熱素保存則

をイメージして熱流の関係概念として熱素を導入し、電荷保存則をイメージして電荷と電流という関係概念を導入し、磁荷保存則をイメージして磁荷と磁流という関係概念を導入した。熱学では熱素という名の示すように熱素という元素が想定された。磁荷と磁流が忘れ去られた現代でも熱流と電流とは生き残っている。

摩擦電気に正負二種が存在することに対応して電気現象の「二流体説」が登場した。磁気現象についての二流体説は見当たらない。

1745年にクライスト (E.G.van Kleist) が、翌年にはオランダのライデン市のミュッセンブルーク (P.van Musschenbroek) が、独立に初めて電気を蓄えることに成功し、ライデン瓶と呼ばれた。ガラス瓶の内外に金箔を張った物であり、ガラスを誘電体とするコンデンサーあるいはキャパシターです。

フランクリン (B.Franklin、1706-1790年) は1746年にライデン瓶を理解した。ガラス瓶の内側と外側とが逆に帯電し、この2つが相殺する現象が放電であることを知ったフランクリンは正電気と負電気の用語を導入し、この符号を考えることにより電気の一流体説を提案した。つまり、本来は中性だが、正電気負電気のどちらか一方が余剰の状態と欠けた状態とがあるとの認識です。雷を放電現象と理解して避雷針の発明をしたのもフランクリンです。有名な凧の実験は1752年のことだが、フランクリンの話を知ったフランス人が先に実験し、後にフランクリンもやってみたらしい。アメリカ独立運動にも貢献したフランクリンは「天上からは稲妻を、暴君からは王笏をもぎとった」とされた。

フランクリンと同時代に生きた平賀源内 (1726-1779年) は摩擦起電器エレキテルで人を驚かした。18世紀には、蘭学を通して摩擦電気現象が日本に到来したことが判る。

後の1860年頃にライデン瓶の放電が振動的であることが確認された。

ヘルツ (H. R. Hertz、1857-1894年) は、電磁波の発生にライデン瓶が使われた。

1.2 クーロンの法則：力学の影響

コペルニクス (N.Copernicus、1473-1543年) 、ケプラー (J.Kepler、1571-1630年) 、ガリレイ (G.Galilei、1564-1642年) 、ニュートン (I.Newton、1643-1727年) の4名を担い手とする17世紀科学革命 (バターフィールド、1949年) を通して、近代科学が始まった。近代科学では、実験や観測の結果に対して、「何故？」

あるいは「何のために？」という問いは無意味です。「どのように？」との問いに答えようとするのが近代科学です。「引力がなぜ発生するか、あるいは引力が何のために存在するのか」との設問を避けて、「引力がどのような法則に従うか」を明らかにすることが科学であり、その結果がニュートンの著書『プリンキピア』（1687年）にも述べられた万有引力の法則（1665年）です。

18世紀末には帯電体間の力や磁極間の力に関する逆2乗則が想定されていた。このことはニュートンの万有引力の法則からの類推です。ニュートン力学の質点に対応する概念が点電荷や点磁荷であり、万有引力の法則にあらわれた質量に対応するのが電荷や磁荷です。静電気現象と静磁気現象とに万有引力の形式を採用した結果が逆2乗則であり、クーロンの法則と呼ばれている。

クーロンの法則は、クーロン (C.A.de Coulomb、1736-1806年) が発見した法則ではなくて、18世紀末の時代思想の産物です。ネジリ秤を使ったクーロンの実験（1785年）はあまりにも有名だが、逆2乗則に都合の良いデータだけを選び出して発表したようだ。それでもクーロンの業績を讃えて電荷の単位としてクーロン (coulomb) が使われている。なおA.Bennettにより金箔検電気が発明されたのはクーロンの実験の3年後の1787年です。

キャベンディッシュ (Henry Cavendish、1731-1810年) の遺稿によれば、キャベンディッシュの実験は同時代あるいは後の科学者の発見を先取りしていた¹。キャベンディッシュは自らの実験により電気現象の逆二乗則からのずれが2%以内であることを認識していたし、オームの法則についてもオームによる発見（1827年）よりも46年も早く発見していた（1781年）。後に、ケンブリッジに新設された実験物理学研究所の初代所長マクスウェル (J.C.Maxwell、1831-79年) はこの研究所をキャベンディッシュ研究所と命名し（1874年）、キャベンディッシュの先見のかつ確かな実験手法を称えた。

クーロンの実験の3年後にラグランジュ (J.Louis.Lagrange、1736-1813年) の『解析力学』（1788年）が公刊された。逆2乗則の出現はニュートン力学の発展と密接な関係がある。当時は位置エネルギーという概念が確立していた。位置エネルギーは、二つの物体間の相互作用エネルギーであり、二物体間の距離のみに依存する。二物体間の相互作用エネルギーが位置エネルギーならば、二物体間に働く力の

¹ 霜田光一：『歴史をかえた部鶴実験』（丸善、1993）1～2章

向きは二物体を結ぶ直線の方であり、二物体間に働く力の大きさは、位置エネルギーを二物体間の距離で微分したものに等しい。

万有引力に対応するポテンシャル（重力ポテンシャル）は二物体間の距離に反比例する。ニュートン力学にあらわれる通常の力はポテンシャル力なので、クーロンの法則はポテンシャル論として発展した。

ポテンシャルは、静電気現象では電位、静磁気現象では磁位です。静電磁気学はポテンシャル論により発展し、成功を収めた。静電磁気学の単位系には静電単位系（CGSesu）と静磁単位系（CGSemu）とが存在した。

電磁気学の独立な基本概念は、クーロンの法則が発見された頃には、電荷と磁荷です。電荷概念に支えられている電位という概念は現在でも使われているが、磁荷概念に支えられている磁位は現代ではほとんど瀕死の状態にある。

ポテンシャル論が大成功を収めたので、ポテンシャル力以外の力は力学の世界では忘れ去られ、自然界に存在するさまざまな二体力に対応するポテンシャル $U(r)$ の関数形に関心が移動した。例えば動摩擦力は、ポテンシャル力ではないので、純粋力学では扱わない。

因みに、1935年に湯川秀樹は核子と核子との間のポテンシャル力として湯川ポテンシャルを導入している。湯川ポテンシャルは、中間子のコンプトン波長 λ を使って

$$\frac{1}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right)$$

に比例する。これは、 λ より近いところでは核子間距離 r に反比例し、 λ より遠いところでは $\exp(-r/\lambda)$ に従って急激に減少するので、実際問題として近距離だけに働く相互作用ポテンシャルです。

静電磁気現象を理解記述するには電荷（あるいは電気単極子）と磁荷（あるいは磁気単極子）を使うのが便利です。

細い棒状絶縁体の棒の両端にプラス電荷とマイナス電荷とが帯電しているものは、電荷からの距離が棒状絶縁体の長さ比べて充分遠いところでは、電気双極子です。逆に、電荷からの距離が棒状絶縁体の長さに比べて充分近いところでは電気単極子のように見える。

細い棒磁石や方位磁針は、磁極からの距離が棒磁石の長さに比べて充分離れているところでは、両端をN極とS極とする磁気双極子です。逆に、どちらかの磁極からの距離が棒磁石の長さに比べて充分近いところでは磁気単極子です。

1.3 電流

1.3.1 ボルタの電堆

ボルタ (A.Volta、1745-1827年) がボルタの電堆 (electric pile) を発明した (1800年)。ボルタの電堆は0.76Vの単電池の直列接続です。ボルタは電圧の単位ボルト (volt) と記号Vに名を遺した。

ボルタの単電池は世界初の化学電池で、正極に銅板を、負極に亜鉛板を用い、両極の間に電解液 (硫酸あるいは食塩水) をしみ込ませた紙を挟んだ。電気化学現象に頼るボルタの電堆を安定動作させることは必ずしも容易でなかった。電解質溶液を含んだ紙の長時間にわたる管理は特に難しかった。

ボルタの電堆は次の二つの意味で重要です。

第一に、ボルタの電堆は化学反応と電気現象とが独立ではないことを示し、電気化学が始まった。18世紀末までは、光学は勿論のこと、電気現象と磁気現象とは全く別の現象だと考えられていた。しかし19世紀の前半に物理の対象が広がるとともに、広範な領域を統一的に理解しようとする機運が高まった。たとえば、熱力学第一法則も1850年頃までに確立された。ボルタの電堆はこの風潮の先駆けとなった。

第二に、ボルタの電堆という直流電源を使う実験が可能となった。特に、エルステッド (H.C.Ørsted、1777-1851年) による電流の磁気作用の発見 (1820年) 以降に著しく多数の実験が相次いで行われ、電磁気現象の理解と電磁気学の建設に貢献した。

1.3.2 エルステッド：電流の磁気作用

電気現象と磁気現象との関わりを模索していたエルステッド (H.C.Ørsted、1777-1851年) はボルタの電堆に方位磁針を近づけたりしていたが、方位磁針は反応しなかった。しかし、コペンハーゲン大学での演示を伴う講義中に、電流の流れている電線の近くの方角磁針が北ではない方角を指していることを見落とさなかった。エルステッドは、その後、数ヶ月の研究の末、電流の磁気作用を報告した

(1820年9月11日)。ボルタの電堆の発明から20年後のことです。電流の磁気作用の発見は、検流計や電流計の発明でもある。

電流の磁気作用の発見(1820年)は、以下に述べるように、多くの科学者達を刺激しただけでなく、電磁気現象を本格的に研究する発端となり、その後の20年間はアンペール(A.M.Ampère、1775-1836年)やファラデー(M.Faraday、1791-1867年)らによる重要な発見が相次いだ。同じ20年間に熱力学と熱電気現象でも重要な発見が続いた。

1.3.3 アンペールの法則、アンペール力、ビオ・サバールの法則

エルステッドの報告を知ったアンペールは、直ちに電流の磁気作用の実験に取り組み、一週間後に、右ネジの法則の形でアンペールの法則(図1.1)を報告(1820年9月18日)した。アカデミーでのデモンストレーション(図1.2)では、平行する2本の導線を使い、電流の流れている電線間には、電流の向きが並行の場合には引力が働き、逆並行の場合には斥力が働くことを示した。

こ電流の流れている電線間に働く力はアンペール力と呼ばれている。アンペール力は、電流間の力ではなくて、電流の流れている電線間の力であることに注意して欲

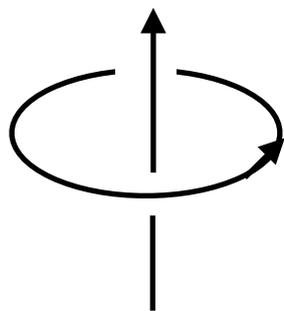


図1.1 アンペールの法則(右ネジの法則)の絵解き:直線電流の近くの磁針には力が働く。右ネジの進行方向を電流の向きとすると、方位磁針に働く力は右回転です。

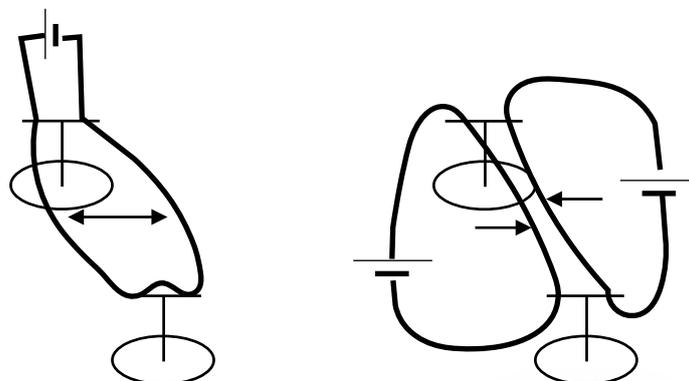


図1.2 アンペール力のアカデミーでのデモンストレーション:電流の流れている導線には力が働く。電流の向きが同じなら引力(右)、逆向きなら斥力(左)。

しい。電流の流れているソレノイドコイルが太く短くなろうとするのはアンペール力の表れです。

アラゴー (D.F.J.Arago、1786-1853年) は電流による鉄の磁化 (1820年) を発見した。この発見は電磁石の始まりとされる。

ビオ (Biot、1774-1862年) とサバール (Savart、1791-1841年) は、共同で電流の磁気作用の確認実験を行い、ビオ・サバールの法則 (1820年) に名を遺した。ビオ・サバールの法則によれば、例えば、長い直線状電線に流れている電流に伴う磁場の大きさは直線状電線からの距離に反比例する。

1820年は電磁気学にとってこのように稔り豊かな年だった。

アンペール力は、二つの電流の積に比例し、導線間距離に反比例する。アンペールはこのことを確認した (1822年)。二つの電流の積に比例するアンペール力は電流に纏わり付く磁場を介して電線間に働く力と理解され、この解釈は19世紀末まで続いた。

なお、現代の電流の単位アンペア (ampere) と記号Aはアンペールの名に因む。

1.3.4 磁気回転の実験と単極モーター

ファラデー (M.Faraday、1791-1867年) は、1821年に、磁気回転の実験を行った。水銀を入れた皿の中央に棒磁石を垂直に立て、上から水銀に浸るように針金を

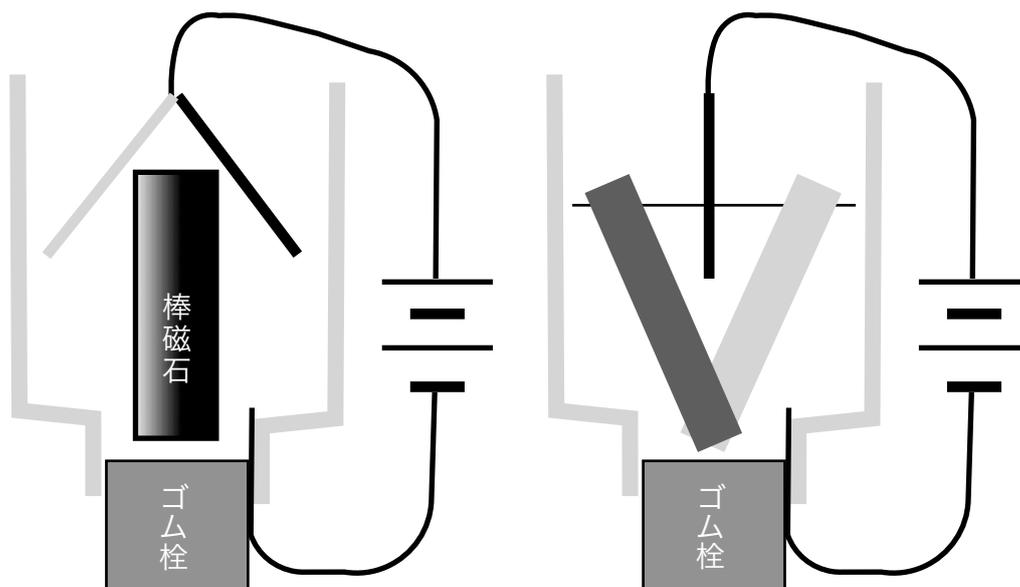


図1.3 ファラデーの磁気回転 (1821年) : 水銀に斜めに垂らした電線が棒磁石の周りを回転する (左図)。水銀に垂直に垂らした電線の周りを斜めの磁石が回転する (右図)。

斜めに垂らし、その針金と水銀を通るように電流を流すと、垂らした針金が磁石の周囲を回転する。逆に、針金を垂直に垂らし、棒磁石側を斜めにすると、棒磁石が針金の周りを回転する。この実験は電流の流れている導線と棒磁石の磁極との間に働く力を使ったものです。電動モーターの始まりとされる。

磁気回転の実験に刺激されたアンペールは、同じ1821年に、棒磁石を立てるように水銀に沈め、棒磁石の中心軸と水銀の間に電流を流す（図1.4）と棒磁石が軸の周りに自転することを発見した。これは単極モーターの始まりとされる。この電流は軸対称なので、ファラデーの電磁気回転とは本質的に異なるように見える。

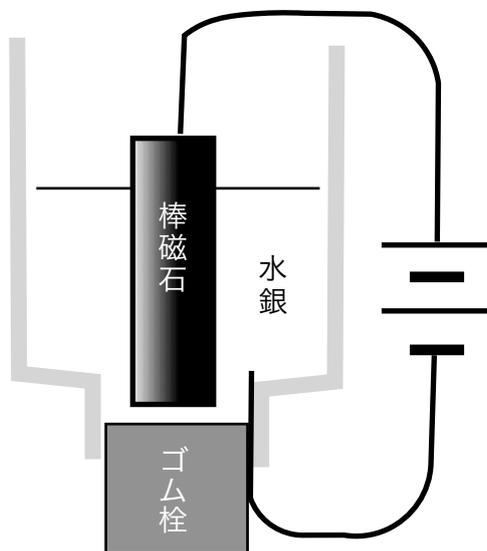


図1.4 アンペールの単極モーター（1821年）：水銀の中に棒磁石を立てる。棒磁石の上部の凹みにも水銀を満たして、液体金属による電気接点としている。電流を流すと棒磁石が自転する。

現代では単極モーターを作って遊ぶのは容易です。小型で強力な磁石が手に入るからです。鉄釘と単4の乾電池と直径15mm程度の円盤状ネオジム磁石と導線を用意する。鉄釘とネオジム磁石はさび止めにニッケル鍍金（めっき）したものを使う。円盤状ネオジム磁石は片面がN極に他の面がS極に磁化されたものを選ぶ。円盤状磁石、乾電池、鉄釘を同軸に並べる。乾電池の外筒が鉄製なので、鉄釘の頭を持って吊り下げることが出来る（図1.5）。

鉄釘の頭から伸ばした導線の先を円筒磁石の側壁に触れると、磁石と乾電池が一体となって自転する。自転方向は円盤状磁石の上下を変えると反転する。自転速度が大きくなると、磁石と乾電池が一体となって、落下する。自転速度が大きくなるにつれて鉄釘が感じる磁力が小さくなるのです。

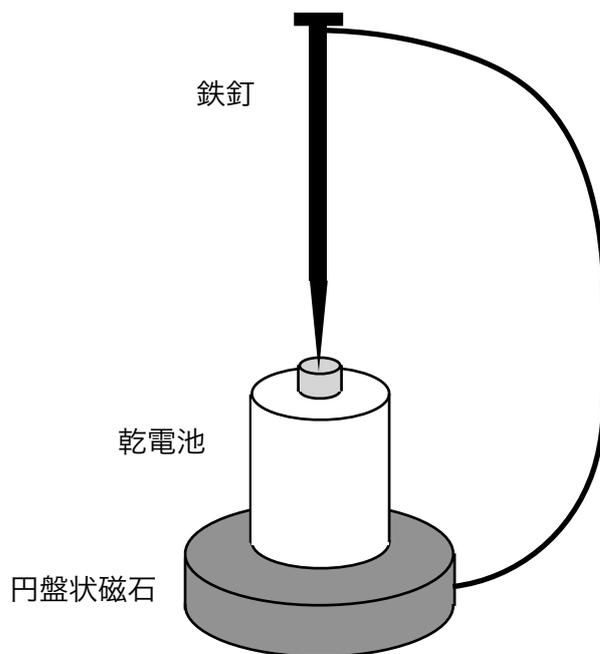


図1.5 単極モーター：円盤状磁石、乾電池、鉄釘を同軸に並べる。乾電池の外筒が鉄製なので、鉄釘の頭を持って吊り下げることが出来る。鉄釘の頭から伸ばした銅線の先を円筒磁石の側壁に触れると、磁石と乾電池が自転する。自転方向は円盤状磁石の上下を変えると反転する。釘と電池との接触は点接触に近いので摩擦力が小さいが、磁石と銅線の接触は相対速度が大きいため摩擦力も大きい。火花も見える。

スタージャン (W.Sturgeon、1783-1850年) は、1823年に、ソレノイドコイルに鉄芯を挿入すると強い電磁石になることに気づき、整流式直流モーターを発明した (1825年)。

当時の検流計に使われた方位磁針は振動運動すると静止するまでに時間がかかった。アラゴー (Arago、1786-1853年) は検流計を改良した。方位磁針を銅板などの良導体の近くに置くと、方位磁針が静止するまでの時間が短くなった。検流計の改善とは、方位磁針の下には導体板を置くことで生じる応答時間の短縮です。次にアラゴーはアラゴーの円盤と呼ばれる現象を発見した (1825年)。導体円盤の中心軸と方位磁針の回転軸とが同軸になるようになれば、導体円盤を回転させると方位磁針が追随するように回転した。逆に、方位磁針を回転させると、導体円盤も追随するように回転した (図1.6)。

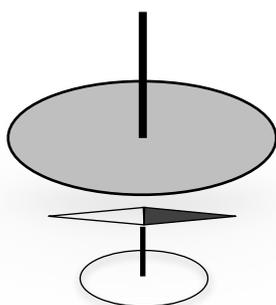


図1.6 アラゴーの円盤 (1825年)：導体円盤の中心軸を垂直につるす。導体円盤の下に置いた方位磁針の回転軸を導体円盤の中心軸と合わせる。導体円盤を回転させると方位磁針も同じ方向に回転する。逆に方位磁針を回転させると導体円盤も同じ方向に回転する。

1.3.5 アンペールの電磁気学

磁石の磁場はコイル状導体に流れている電流に伴う磁場と区別が付かない。つまり、磁石には電流（磁化電流）が流れているように見える。電流の流れている円環状導体の磁場と円盤磁石の磁場とはそっくり同じです。このために、電流を磁場で表現することができるし、磁場を電流で表現することもできる。

磁化電流の流路は円盤磁石の縁でも良いし、餅網の編み目状でも良い。編み目はどんなに小さくても良い。

アンペールは著書『電気力学的諸現象について、実験によりひとつに結論される理論覚え書き』を出版した（1827年）。この著書で、磁石を多数の分子磁石の集まりとするモデルを提案した。分子磁石は小さな磁気双極子です。分子磁石に対応するのは餅網の小さな編み目に流れる磁化電流です。このモデルは巨視的磁化の微視的議論です。

電磁気学の基本概念の一つだった磁荷は、電流の磁気作用の発見により、徐々に、電流に置き代わった。磁荷が電流に置き換わるとともに「電流とは何か？」との問題が産まれた。

アンペールは、前掲の著書で、「電流を電荷の移動」とみなした。電荷の移動としての電流を認めるなら、電流は電荷を使って定義できるので、電流と電荷とは独立な基本概念ではない。基本概念は電荷だけです。

電荷の流れとしての電流を認めるなら、磁荷の流れとしての磁流を認めても良いはずだが、電流だけが生き残り、磁流は消え去った。電荷に対応する磁荷（すなわち磁気単極子）が見つからなかったこともその一因でしょう。

1.4 電磁誘導

ファラデー（M. Faraday、1791-1867年）が電磁誘導現象を発見し報告した²のは1831年のことです。（地球）磁場中で運動する閉じた導体には誘導起電力が生じる。閉じた導体に磁石を近づけり遠ざけたりしても誘導起電力が生じる。また、一つの鉄芯に2つのコイルを巻き付け、一つのコイルに電流を流すと、他方のコイルの検流計が瞬間的に振れるという相互誘導もある。相互誘導は変成器（トランス）の発明ですが、当時の電源はボルタの電堆や熱電堆などの直流電源だけです。

² 霜田光一：『歴史をかえた物理実験』（丸善、1993）3章

翌1832年に自己誘導現象を報告したヘンリー（J. Henry、1797-1878年）はインダクタンスの単位ヘンリーHに名を遺した。

電磁誘導は、静電磁気現象ではなくて、動電磁気現象として認識された。

電磁誘導を研究したファラデーは同じ1831年に「閉回路に生じる誘導起電力は、閉回路を縁とする開曲面を貫く磁力線の本数の変化に比例する」と主張した。これがファラデーの電磁誘導の法則です。この法則は自らの磁力線イメージに基づいている。磁力線イメージは、第2章 ファラデーの力線イメージで述べるように、静電磁気現象で有用なイメージです。移動する力線や運動する力線は含まれない。

ファラデーは1831年に発見した単極誘導については1832年に報告した。円盤状導体の中心軸と棒磁石の中心軸とを同軸とし、円盤状導体を廻転させると、円盤状導体に径方向の誘導起電力が生じる（図1.7）。円盤状導体を廻転させる際に、棒磁石を円盤状導体とともに廻転しても、棒磁石だけは動かないように固定しても、円盤状導体に径方向誘導起電力が生じる。これが単極誘導による起電力です。

単極誘導は単極発電機の発明です。単極発電機は直流発電機です。

ファラデーの単極誘導はアンペールの単極モーター（1821年）の逆現象です。検流計を電池に置き換えるとアンペールの単極モーターになるからです。

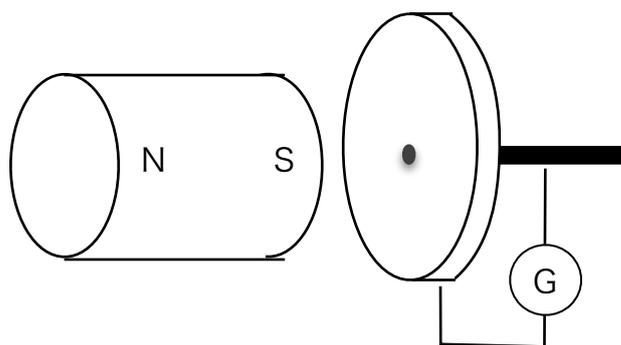


図1.7 単極誘導：円盤状導体（右）の中心軸と棒磁石（左）の中心軸とを同軸とし、円盤状導体を廻転させると、円盤状導体に径方向誘導起電力が生じる。円盤状導体を廻転させる際に、棒磁石を円盤状導体とともに廻転しても、棒磁石だけは動かないように固定しても、円盤状導体に径方向誘導起電力が生じる。単極誘導は棒磁石の自転とは関わりない。

アンペールの単極モーターでは電気接点に水銀を使っている。現代では、電気接点に水銀以外の液体金属を使っても、高速回転が可能になり再び実用的になってきた。

19世紀に誕生したレンツ（H.Lenz、1804-65年）は「誘導電流が流れる場合には、磁場の変化を妨げるように流れる」とのレンツの法則を提唱した（1833年）。磁場の変化が原因で、誘導起電力が生じ、導体中に誘導電流が生じる。誘導電流に起因する磁場は、磁場の変化を妨げる。レンツの法則は現状維持を肯定する因果律です。社会変革を目指す革新勢力に対抗して既得権益の維持を謀る保守勢力が出現することとよく似ている。

電気分解の研究を行ったファラデーは電気分解の法則（1833年）に辿り着き、電流のイメージをイオン（荷電粒子）の運動と結びつけた。ファラデーも、アンペールと同様に、「電流は荷電粒子の移動」と見なした。電気分解のファラデー定数はファラデーの名に因む。

電気分解の法則は電気メッキに応用され、電気メッキのための直流電源として単極発電機が使われた。1830年代後半には電気メッキが普及し、単極発電機をいち早く採用したバーミンガム市は1842年には電気メッキで世界の中心となった。

単極誘導（unipolar induction）との名称はレンツと同年齢のヴェーバー（W.E.Weber、1804-91年）が1841年に使った言葉であり、homopolar inductionと呼ばれることもある。単極誘導の実験には必ずしも長い棒磁石を使う必要がないので、単極誘導という呼称は不適當です。また、単極誘導との命名には磁気単極子のイメージが潜んでいることに注意して欲しい。

交流発電機が普及し始めた1890年代迄の約50年間は、エジソン（T.A.Edison、1847-1931年）の発電機を含めて、全て単極誘導による直流発電機だった。単極発電機は低電圧大電流に適している。回転数に比例する出力電圧を高くするには高速回転が必要であり、集電接点が問題となる。直流発電機の集電接点や直流モーターの整流子の問題は交流発電機と交流モーターには存在しない。

誘電体を研究したファラデーは誘電分極（あるいは電気分極）も発見し、静電容量の単位ファラッドとその記号Fに名を遺した。誘電体の電気分極を電気双極子の集まりと理解するのは微視的モデルの一つです。

余談ですが、電流1Aの定義は時代により変遷した。1908年から1948年まではファラデーの電気分解の法則（1833年）を使って定義され、1948年から1990年迄はアンペール力を使って定義された。現代の1Aはオームの法則（キャベンディッシュ1781年、オーム1826年）を使って定義されている。オームの法則を使って定義するための電圧標準と抵抗標準は、それぞれ、ジョセフソン効果（1962年）と量子ホール効果（1980年）です。

1.5 電磁気学と熱力学：二大現象論

二大現象論と呼ばれる電磁気学と熱力学とは19世紀にほぼ並列して進展した。熱電気現象では電磁気学と熱力学の両者が関わる。

電流の磁気作用の発見の翌1821年にはゼーベック（T.J. Seebeck、1770-1831年）が熱起電力を偶然発見した。2種類の導体をつないでリングをつくり、片方の接点を加熱し他方の接点を空冷すると、リングの近くに置いた方位磁針が振れた。この現象をゼーベックは熱の磁気効果と呼んだが、後に、ゼーベック効果と呼ばれるようになった。ゼーベック効果による起電力は熱起電力あるいはゼーベック起電力とも呼ばれる。

フーリエ（J.P.J. Fourier、1768-1830年）が『熱の解析理論』を出版した（1822年）。カルノー（N.L. Sadi Carnot、1796-1832年）の著書『火の動力』（1824年）は熱力学の黎明となった。

ゼーベック効果の発見により実験に使える直流電源が増えた。オーム（G. Ohm、1789-1854年）が「電流の流れやすさは導体の断面積に比例し導体の長さに反比例する」とのオームの法則を発見した（1827年）。この実験に使った電源は熱電対の直列接続である熱電堆だった。同じ1827年に、アンペールの著書『電気力学的諸現象について、実験によりひとつに結論される理論覚え書き』が出版された。

ファラデーによる電気分解の法則（1833年）やレンツの法則（1833年）が発見された翌1834年にペルティエ（Jean-Charle Peltier、1785-1845年）は、「異種金属を直列接続して電流を流すと接続部で熱の吸収や放出が生じる」ペルティエ効果を

発見した。ゼーベック効果とペルティエ効果とは、電流と熱流には密接な関係があることを示唆した。

19世紀に誕生したジュール (J.P.Joule、1818-89年) は、初期には電動モーターの改良を目指していたが、後に電動モーターの改良から電流へと関心を移した。電流の流れている導線を水に入れて、水の温度上昇を測定することで、ジュールの法則を発見した (1840年)。ジュールの法則は「電流の流れている導線は発熱 (ジュール発熱) し、その発熱量は、導線の電気抵抗と電流の2乗に比例する」ことを主張する。その後のジュールは、熱の仕事当量の測定に向かい、熱力学第一法則の確立に貢献した。

レンツの法則 (1833年) を考慮したジュール発熱 (1840年) は熱力学との関わりで重要です。レンツは現代人には馴染みの誘導加熱 (Induction Heating) を使って熱の仕事当量を測定した (1842年)。

アラゴの円盤と電動モーターは、ジュール発熱が小さくなるように、回転する。アラゴの円盤では、導体円盤が静止しているとレンツの法則による誘導電流が流れ、ジュール発熱が生じる。この導体円盤と方位磁針は、ジュール発熱が小さくなるように、一体となって回転しようとする。電池に繋がれた電動モーターでもジュール発熱が生じる。モーターが回転すると、誘導起電力により、モーターに流れる電流が変化し、ジュール発熱も変化する。アラゴの円盤と電動モーターは、ジュール発熱が小さくなるように、回転方向を選ぶ。

ジュール発熱が小さくなるように導体に働く力は、伝統的電磁気学が排除してきた熱力学的力です。後の、発熱量最小の法則やエントロピー生成最小の法則の顕れです。

クラウジウス (R.J.E.Clausius、1822-88年) は熱力学第二法則の最初の定式化とされるクラウジウスの不等式を発見した (1854年)。同じ1854年にケルビン郷トムソン (W.Thomson、1824-1907年) は、電流の流れている導線には、ジュール発熱とは別に、「温度勾配と電流とに比例する吸熱や発熱がある」ことを発見した。この比例係数はトムソン係数と呼ばれ、この現象はトムソン効果と呼ばれている。

熱電気現象はゼーベック効果とペルティエ効果とトムソン効果の総称です。

熱電気現象には、トムソンの第一関係式とトムソンの第二関係式とがあり、それぞれ、熱力学第一法則と第二法則の顕れです。熱電気現象は、この意味で、熱力学の対象です。

地球の自転を証明したフーコー振子（1851年）で有名なフーコー（L.Foucault、1819-68年）は磁場内で運動する導体に電磁誘導により生じる誘導電流が渦状であることを発見した（1856年）。このために誘導電流はフーコー電流あるいは渦電流とも呼ばれる。マクスウェル（James C.Maxwell、1831-79年）は電磁気学に関わる第一論文を学会発表した（1856年）。

マクスウェルが電磁気学に関わる第三論文を発表し、電磁波を論じた1865年に、クラウジウスは示量性状態量としてのエントロピーを導入し、熱力学第二法則の最終的定式化とした。熱力学特有の示量性状態量エントロピーの出現により、平衡状態の熱力学の建設が可能となった。ギブズ（J.W.Gibbs、1839-1903年）が平衡状態の熱力学を建設したのは1870年代のことです。

このように、電磁気現象の研究と熱力学の研究とは、19世紀に、ほぼ並行して進展した。特に、熱電気現象に関わる重要な現象の発見と重要な電磁気現象に関わる重要な発見とは時期が重なっている。

熱電気現象には力学的側面と熱的側面がある。力学的側面は電磁気学で記述され、熱的側面は熱力学で記述された。

電磁気学は多様な電磁気現象から力学的に理解可能な現象だけに対象を絞り込む傾向が見られる。アンペールの単極モーター（1821年）とアラゴの円盤（1825年）を理解するには、電磁気学だけでは無理があり、熱力学的議論も必要です。熱電気現象も電磁気学の対象外とすることが多い。

力学は、議論の対象を一様温度の場合に限定し、吸放熱を伴う現象を排除する。摩擦では2つの物体が相対運動する。2つの物体摩擦力に逆らって相対運動させるには力学的エネルギーを投入する必要がある。この力学的エネルギーが熱エネルギーに変換されて摩擦熱となる。

摩擦現象でも力学的エネルギーが全て熱エネルギーに変換されるとは限らない。投入した力学的エネルギーの一部分を使って、片方の物体の電荷を他方の物体に移

動させることが可能な場合には摩擦電気が生じる。帯電した二つの物体を引き離すことはクーロン引力に逆らうことなので更にエネルギーが必要とされる。このような議論は熱力学の視点なので、電磁気学の対象から排除された。

1.6 空洞放射：二大現象論の深淵

空洞放射を研究したキルヒホッフ (G.R.Kirchhoff、1824-87年) は黒体概念を確立し、黒体放射のエネルギー強度は黒体の温度だけの関数であることを示した (1859年)³。因みに、キルヒホッフは電気回路論を創始し (1849年)、管内音波のキルヒホッフ理論 (1868年)⁴は音響学の基本となった。

熱力学の基本概念であるエントロピーを力学で理解しようとしたボルツマン (L.E.Boltzmann、1844-1902年) は示量性状態量としてのエントロピーを統計力学的に解釈した (ボルツマンの関係式、1877年)。ボルツマンは「示量性状態量としてのエントロピーは無秩序の程度を表す」と解釈したので、エントロピー増大則は無秩序の増大則と理解された。

マクスウェルが他界した1879年にボルツマンの師シュテファン (J.Stephan、1853-93年) は黒体放射のエネルギー強度は黒体の温度の4乗に比例するとの実験結果を報告した。この4乗則をボルツマンは統計力学的議論で証明した (シュテファン・ボルツマンの法則、1884年)。この際に使ったのがマクスウェルの弟子ポインティング (J.H.Poynting、1852-1914年) による電磁場のエネルギー流密度 (ポインティングベクトル) です。

ヘルツ (H.R.Hertz、1857-94年) はヘルツの実験 (1886-88年) で電磁波の存在を確認し、光の波動説に確かな根拠を与えた。

波動説では放射の周波数分布が問題になる。19世紀末に黒体放射のスペクトル分布の研究が進展し、プランク (Max Planck、1858-1947年) は一つの経験式としてプランクの輻射式を提出した (1900年10月19日の講演)。さらに、プランクは、量子仮説を使って、この輻射式を統計力学的に導出した (1900年12月14日の講演)。量子仮説とは黒体の壁が吸収したり放出したりする輻射エネルギーは $\hbar\omega$ に量子化さ

³ 物理学史研究刊行会編『物理学古典論文叢書1 熱輻射と量子』(東海大学出版会、1970)

⁴ J.W.S.Rayleigh: "The THEORY OF SOUND" (Dover Pub. 1945) によればPogg. Ann, cxxxIv 177 (1868)

れているとの仮説です。ここで ω は電磁波の角周波数であり \hbar はプランク定数です。プランクの輻射式は量子統計力学の誕生でした。プランクは量子力学の創始者の一人として1918年にノーベル物理学賞を受賞した。

エネルギーの量子化を受け容れたアインシュタイン (A.Einstein、1879-1955年) は光量子 (photon) を仮定して光電効果を予測した (1905年)⁵。光量子はエネルギー $\hbar\omega$ と運動量 $\hbar\omega/c$ の素粒子です。光量子仮説は運動量の量子化の始まりです。ま光量子は電磁波の第二量子化です。アインシュタインが「輻射の量子論」(1917年) で議論した誘導放射はレーザー発振 (1960年) やその後の非線形光学の基礎となった。アインシュタインは光子導入の業績によって1921年にノーベル物理学賞を受賞した。

油滴実験 (1909年) で、電気素量を精密に測定し、電荷が量子化されていることを示したミリカン (R.A.Millikan、1868-1953年) は実験により光量子仮説を証明した (1916年)。ミリカンも電気素量の精密測定と光電効果の実験で1923年にノーベル物理学賞を受賞した。

熱力学の対象としての黒体放射と電磁気学の対象としての黒体放射とが量子統計力学と量子力学の誕生に関わっていることにも注意して欲しい。深淵で繋がっている電磁気学と熱力学とを別々に学ぶことは縦割り行政の誹りを免れない。

1.7 電流は基本概念：力学の影響

電磁気現象に戻る。

既に述べたように、電磁気学の独立な基本概念は、電流の磁気作用の発見 (1820年) 迄は、電荷と磁荷だった。基本概念は他の概念を使って定義することが出来ない独立概念です。

電流の磁気作用の発見は、電磁気学の本格的研究の導火線となっただけでなく、「電流とは何か？」という問題を産みだした。アンペールは1827年の著書 (1827年) で「電流は電荷の移動」とした。後に電気分解の法則を発見 (1833年) したファラデーも、アンペールと同様に、「電流は電荷の移動」とした。それでも、「電流は電荷の移動」が容認されなかったのはニュートン力学の影響です。

⁵ 物理学史研究刊行会編『物理学古典論文叢書2 光量子論』(東海大学出版会、1969)

ニュートン力学ではポテンシャル力ではない力をまともには議論しない。例えば動摩擦力は二つの物体の相対速度に関わる力なのでポテンシャル力ではない。このために、運動方程式に動摩擦力を形式的にとり入れるだけです。摩擦力そのものについては議論しない。

アンペール力は電流の流れている電線間に働く力です。「電流は電荷の移動」とすると、電流は電荷の移動速度に依存するので、アンペール力は導体中の電荷の移動速度に関わる力となり、アンペール力はポテンシャル力ではないことになる。ポテンシャル力だけを基本的力とするニュートン力学は移動速度に依存する力を基本的力とは認めない。

アンペール力を力学的に理解するには、ニュートン力学を変えずに電荷と電流とを独立な基本概念とするか、あるいは、ニュートン力学を拡張して電磁気現象を含むようにするか、どちらかが必要でした。

電流の磁気作用が発見された1820年以降は、17世紀科学革命以来の伝統を誇るニュートン力学に敬意を表して、電荷と電流とを電磁気現象の独立な基本概念とし、「電流とは何か？」との問題を避けた。「電流とは何か？」を避けの代わりに、アンペール力は電流に纏わり付く磁場（アンペールの右ネジの法則）が介在する力、とされた。

現代では「電流は電荷の移動」に疑念を挟む人に出会うことは希です。第4章 運動物体の電磁気学で述べるように、19世紀末に、「電流は電荷の移動」を容認した電磁気学に新たに座標変換の視点が加わったのです。

2. ファラデーの力線イメージ

電磁気現象を定性的に記述・理解することを目指したファラデー（M.Faraday、1791-1867年）は、力線概念を使うことで、当時の電気現象と磁気現象とに関わる実験を統一的に理解したとされる。

2.1 力線と力管

流体力学では定常流の様子を流線で表現することがある。流速の方向は流線の方向であり、流速の大きさは流線の密度に比例する。流線は湧き出しから始まり吸い込みで終わる。湧き出しでは外向きの流線を伴い、吸い込みでは内向きの流線を伴う。湧き出しの強さと吸い込みの強さとは流線の本数に比例する。湧き出しや吸い込みを別にすれば流線は連続で交わることが無い。ファラデーの力線はこの流線に似ている。

ファラデーの力線には幾何学的性質と物理的性質とがある。ファラデーの力線は、流線と同様に、交わることが無い。このことは力線の幾何学的性質です。

ファラデーの力線は張力を伴い、隣り合う力線間には斥力を伴う。力線の張力と力線間の斥力とは力線の物理的性質です。

力線の束を力管（あるいはファラデー管）と呼ぶ。力線の張力と力線間の斥力のために、力管は太く短くなろうとする。

ファラデーの力線 1 本あたりの張力と力線間の斥力とは**力線密度**（単位面積を貫く力線の本数）に比例するとした。

このために、力管の単位断面積あたりの張力は力線密度の 2 乗に比例し、力管を太くしようとする圧力も力線密度の 2 乗に比例する。比例係数は力線の張る空間あるいは媒質の物理的性質に依存する。

圧力は単位体積当たりのエネルギーです。力線密度が大きいところは単位体積当たりのエネルギーが大きい。

2.2 電気力線と磁力線

正電荷から始まり負電荷で終わる電気力線を想定する。正電荷は外向きの電気力線を伴い、負電荷は内向きの電気力線を伴う（図2.1）。電気力線の張力のために、正電荷と負電荷の間には引力が働く。電気力線の斥力のために、同符号の電荷のあいだには斥力が働く。

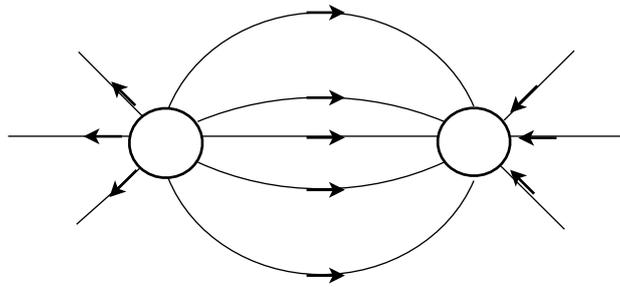


図2.1 電気力線の絵解き：電気力線の本数は電荷に比例する。正電荷は外向きの電気力線を伴い、負電荷は内向きの電気力線を伴う。電気力線は正電荷から負電荷へ向かう。図は異符号電荷の場合です。同符号電荷の場合には電気力線が反発し合う。

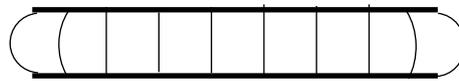


図2.2 電極間距離にくらべて大きい平行平板電極からなるコンデンサの電気力線。平行平板電極の間の電気力線密度はほぼ一様です。平行平板電極の縁の近くでは電気力線密度が非一様となる。

平行平板導体からなるコンデンサーでは、電気力線の張力のために、平行平板電極間に引力が働く。平行平板のサイズは電極間距離 d に比べて充分大きいとすると、平行平板電極の間の電気力線密度はほぼ一様です（図2.2）。電極間距離を d とすると平行平板電極の縁から $d/2$ 程度のところでは電気力線密度が一様ではない。電気力線間の斥力により、外側へはみ出す。

電気力線の本数は電荷に比例する。後の電束密度 \mathbf{D} は電気力線密度と単位電荷との積です。

電気力線の単位断面積あたりの張力は、電束密度 \mathbf{D} に比例し、後の電場（電界強度） \mathbf{E} です。 \mathbf{E} は \mathbf{D} に比例するので比例係数を ϵ^{-1} とすると

$$\mathbf{E} = \epsilon^{-1}\mathbf{D}$$

です。後に力線の張る空間あるいは媒質の誘電率と呼ばれる ϵ は、空間や媒質が等方的な場合には、スカラー量です。簡単のために、以下では等方的な場合に限定する。

電荷からの距離が r の球面上での電気力線密度は r^2 に反比例する。このことが、電荷間に働く力の逆二乗則(クーロンの法則)の力線概念による理解です。

電気力線の張る空間のエネルギー密度は、電気力線が無い場合を基準にすると、

$$\int_0^D \mathbf{E} d\mathbf{D} = \epsilon^{-1} \frac{1}{2} |\mathbf{D}|^2 = \epsilon \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2$$

です。

N極から始まりS極へ向かう磁力線を想定すると、磁気双極子に伴う磁力線は電気双極子に伴う電気力線と同じで、磁気のクーロンの法則も理解しやすい。磁力線の本数は磁荷に比例する。後の磁束密度 \mathbf{B} は磁力線密度と単位磁荷との積です。

磁力管の単位断面積あたりの張力は、磁力線密度に比例し、後の磁場(磁界強度) \mathbf{H} です。 \mathbf{H} は \mathbf{B} に比例するので比例係数を μ^{-1} とすると

$$\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}$$

です。後に力線の張る空間あるいは媒質の透磁率と呼ばれる μ は、空間や媒質が等方的な場合には、スカラー量です。簡単のために、以下では等方的な場合に限定する。

磁力線の張る空間あるいは媒質のエネルギー密度は、磁力線が無い場合を基準にすると、

$$\int_0^B \mathbf{H} d\mathbf{B} = \mu^{-1} \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2 = \mu \frac{1}{2} |\mathbf{H}|^2$$

です。

導線に流れている線電流には磁力線が纏いつく。(図2.3)。線電流に纏わる磁力線は閉じていて、始めも終わりもない。磁力線の向きはアンペールの法則(右ネジ

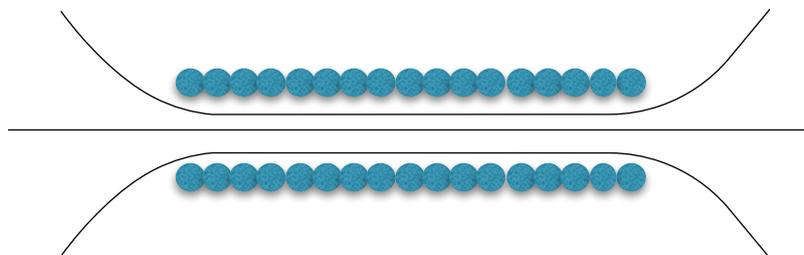


図2.4 直径に比べて充分長いソレノイドコイルに流れている電流に伴う磁力線：ソレノイドコイル内部の磁束密度はほぼ一様です。ソレノイドコイルに流れている電流は円筒状の面電流とみなすこともできる。

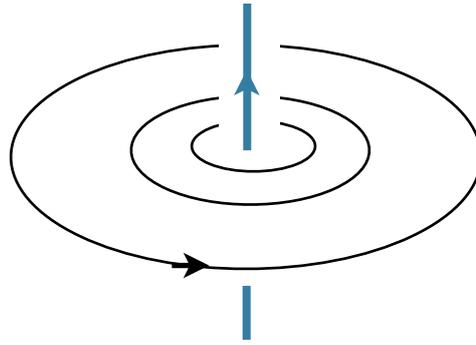


図2.3 電流が纏う磁力線の絵解き：磁力線密度 (=磁束密度 B) は芯の線電流からの距離に反比例する。

の法則) に従うと約束する。線電流の向きに対応して磁力線の向きが決まる。磁力線密度は線電流からの距離に反比例する。

この磁力線は、磁力線間の斥力により、水面の波紋のように広がろうとするが磁力線の張力と釣り合っ静止したままです。

アンペール力は電流に纏わり付く磁力線が介在する力です。磁力線密度は線電流からの距離に反比例するので、アンペール力も電線間距離に反比例する。これがファラデーの磁力線によるアンペール力の理解です。

棒磁石は電流の流れているソレノイドコイルと区別がつかない。円柱状の棒磁石では円柱の側面に一様な面電流が流れているかのように見える。棒磁石はあたかもこのような磁化電流が流れているかのようだ。

電気力線の電荷に相当する磁荷 (あるいは磁気単極子) の代わりに磁化電流を想定すればよい。単位磁荷を単位磁化電流に置き換えれば良い。

直径に比べて充分長いソレノイドコイルに流れている電流に伴う磁力線を図2.4に模式的に示した。ソレノイドコイルの内部の磁束密度はほぼ一様です。コイルの端からコイル半径程度の領域で非一様になります。ソレノイドコイルに流れている電流は円筒状の面電流とみなすこともできる。

棒磁石や電流の流れているソレノイドコイルが短くなろうとするのは磁力線間の斥力の表れです。棒磁石や電流の流れているコイルが太くなろうとするのも磁力線間の斥力の表れです。例えば、強磁場生成を目指した超伝導磁石では、超伝導線を巻

き付けたソレノイドコイルが変形しないように、ソレノイドコイルの外周にナイロン紐などを強く巻き付ける。

ついでに、後のマイスナー効果（1933年）によれば、超伝導体の内部には磁力線は存在しない： $\mathbf{B} = 0$ 。磁力線が存在するのは超伝導体の外部だけです。

2.3 遠隔作用論と近接作用論

ポテンシャルを仮定する遠隔作用論に対してファラデーの力線概念は近接作用論と呼ばれた。力線概念とポテンシャル論とはかなり異なるが、力線概念もポテンシャル論と同様に静電磁気学では便利な概念です。

静電磁気学では力線概念とポテンシャル論に優劣はない。ポテンシャル論からは等ポテンシャル面が想定される。力線は等ポテンシャル面を垂直に貫く線であり、力線の向きはポテンシャルの高い方から低い方へ向かう。地図の等高線は等ポテンシャル線に対応する。

静電磁気学を定性的に理解するには力線概念が便利だが、定量的に理解するにはポテンシャル論が便利です。静電磁気学のポテンシャル論はノイマン（C.G.Neumann、1832-1925年）による先駆的工作により現代の我々が学ぶ形になった。

しかし、電流が纏う磁力線との概念はスカラーポテンシャルに基づく通常のポテンシャル論ではすまない。等ポテンシャル面を想定することができないからです。このために、数式表現としてベクトルポテンシャルを導入することで、形式的に、ポテンシャル論とする。

2.4 電磁誘導の力線概念

誘導起電力は閉回路を縁とする開曲面を貫く磁力線本数の時間変化に比例する。これが磁力線概念に基づくファラデーの電磁誘導の法則でした。

磁力線の本数の時間変化が無い単極モーターと単極誘導とはファラデーの電磁誘導の法則では理解出来ない。また、磁力線の本数の時間変化が無いと、現状維持の法則としてのレンツの法則も役立たない。

電磁誘導の力線による解釈では、力線概念が混乱を招いた。

ファラデーは、相互誘導現象と自己誘導現象を説明するにあたり、磁力線が運動すると電気力線が生じるとの「磁力線運動説」を唱えた。次に、ファラデーは、単極誘導の実験では磁石を固定して導体円盤だけを回転しても起電力が生じるという事実に基づいて、「磁力線静止説」を唱えた。

約20年後に再び単極誘導の研究に戻ったファラデーは、導体が磁力線を横切る時、あるいは磁力線が導体を横切る時に起電力が生じるとする「磁力線切断説」を提唱した。磁力線が導体を横切る時は「磁力線運動説」と同じです。導体が磁力線を横切る時は「磁力線静止説」と同じです。「磁力線切断説」という一つの言葉を使いながら、状況により、その意味を使い分けただけです。

静磁場を記述するために導入した磁力線という概念は磁束密度が時刻に依らない場合に使える。このために、静磁場では「磁力線静止説」は正しいが、わざわざ「磁力線静止説」を提唱する意味がない。仮に、磁力線が磁極に固着しているとのイメージが巷に遍在していたとするなら、単極誘導の起電力が磁石の回転速度とは無関係だという実験事実に基づいて、磁極に固着している磁力線というイメージを否定したのが「磁力線静止説」でしょう。

このような混乱のそもそもの原因はファラデーにある。静磁場を記述するための概念だった磁力線には磁力線の運動という概念は損じしない。にもかかわらず、動磁場現象を理解するために、磁力線の運動という概念を持ち込んだのはファラデー自身です。不思議なことにファラデーが電気力線の運動という概念を持ち込んだ形跡は見当たらない。

単極誘導と単極モーターは磁力線概念では理解不能です。後に述べる座標変換の問題だからです。座標変換を視野に入れて議論するなら、電磁誘導とは「磁場中を運動する導体には、座標変換により、誘導起電力が発生する」ことを意味する。このことについては後に第5章.運動物体の電磁気学で述べる。

3. マクスウェルの電磁気学

ファラデーが電磁誘導の法則を発見した1831年にマクスウェル (J.C.Maxwell, 1831-79年) が生まれた。マクスウェルは、電磁気現象に関わる第一論文”On Faraday’s lines of force” (1856年) で、師ファラデーから学んだ力線イメージに数式表現を与えた。第二論文”On Physical Lines of Force” (1861年3月) で静電磁気現象の理論とした。動電磁気現象については第三論文”A dynamical theory of the electromagnetic field”を学会で発表し (1864年12月28日)、翌1865年に論文として出版した。

ヘヴィサイド (Oliver Heaviside, 1850-1925年) は、多数のマクスウェル方程式を整理整頓して、静電磁気学から二つ、動電磁気学から二つ、併せて、四つのマクスウェル方程式に纏めた (1884年)。

ここからはヘヴィサイドによるベクトル解析の表現を使う。議論の見通しをよくするためです、マクスウェルの時代の物理学は四元数を使って記述されていた。物理数学としてのベクトル解析が常識になったのは20世紀初頭のことです。

3.1 静電磁気学

3.1.1 電束密度と電荷の関係

流速 \mathbf{u} の定常流では、湧き出しの強さは $\nabla \cdot \mathbf{u}$ です。湧き出しがない $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ のところでは \mathbf{u} が連続です。 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ そのものには流線というイメージは無い。流速 \mathbf{u} の大きさを流線の密度で絵解きすることが可能なだけです。

ファラデーの電気力線は正電荷から始まり負電荷で終わる。電気力線の本数は電荷に比例する。単位面積を通過する電気力線の本数に対応する電束密度 (ベクトル) を \mathbf{D} とする。電荷密度 ρ との関係は

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.1)$$

です。第一のマクスウェル方程式は(3.1)です。

(3.1)の根拠はファラデーの電気力線の幾何学的イメージにある。ある体積 V にわたる(3.1)の体積積分を考えると右辺の体積積分はその体積中の全電荷

$$\iiint q dx dy dz$$

に等しい。(3.1)の左辺 ρ の体積積分は、微分幾何学のガウスの定理 (1813年) により、

$$\iiint \nabla \mathbf{D} dx dy dz = \iint \mathbf{D} d\mathbf{S}$$

です。この右辺は体積 V の空間の表面積分であり、この表面を通り抜ける電気力線の総本数に対応する。

(3.1)によれば、電荷密度 ρ が有限 $\rho \neq 0$ の場所では電束密度 \mathbf{D} が不連続ですが、 $\rho = 0$ の場所では \mathbf{D} が連続です。

次元解析から明かなように、電荷の単位を[クーロン]とすると電束密度 \mathbf{D} の単位は[クーロン/面積]です。電束密度という名称は電気力線の密度の名残です。

しかし、数式表現(3.1)には電気力線の端はおろか力線というイメージも存在しない。静電場の様子を電気力線で絵解きすることが可能なだけです。

大きさが電気力管の張力に比例するベクトル \mathbf{E} は電場 (あるいは電界強度) です。 \mathbf{E} の単位は[ボルト/長さ]です。電場 \mathbf{E} と電束密度 \mathbf{D} との関係は

$$\epsilon \mathbf{E} = \mathbf{D} \quad (3.2)$$

です。ここで誘電率 ϵ は、一般にはテンソルですが、等方性媒質ではスカラーです。誘電率 ϵ の単位は[クーロン/ボルト/長さ]です。 $\rho = 0$ の場所では電束密度 \mathbf{D} が連続なので、 $\rho = 0$ でも誘電率 ϵ に跳びがあるところでは電場 \mathbf{E} が不連続です。

後の物性物理では、誘電分極による分極電荷密度 $\mathbf{P} \equiv \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}$ を使って、

$$\epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{P}$$

あるいは

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

とする。 ϵ_0 は真空の誘電率です。真空 ($\epsilon = \epsilon_0$) では

$$\mathbf{P} = 0$$

です。(3.2)を使うと

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \mathbf{D}$$

です。つまり分極電荷密度 \mathbf{P} は電場 \mathbf{E} 電や束密度 \mathbf{D} に比例し、誘電率 ϵ の増加関数です。 $\epsilon \gg \epsilon_0$ では

$$\mathbf{P} \simeq \mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{E} \simeq 0$$

です。金属などの導体内部では、 $\mathbf{E} \sim 0$ なので、 $\epsilon \gg \epsilon_0$ です。

なお、エレクトレットマイクロフォンで馴染みのエレクトレットでは分極電荷密度 \mathbf{P} が長時間一定です。エレクトレットは江口元太郎が、1919年頃に発見し、1924年に試作したとされる。磁石に対応して電石とも呼ばれる。なお、エレクトレット (electret) はヘヴィサイドによる造語です。マグネット (magnet) からの類推でしょう。

3.1.2 磁束密度

磁力線は閉じていて、初めも終わりも無い。磁束密度 \mathbf{B} は連続です。単位面積を貫通する磁力線の本数に比例する磁束密度 (ベクトル) \mathbf{B} を使うと

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (3.3)$$

です。第二のマクスウェル方程式は(3.3)です。

磁束密度 \mathbf{B} は連続です。数式表現(3.3)の根拠はファラデーの磁力線の幾何学的イメージにあるが、(3.3)には磁力線というイメージが存在しない。静磁場の様子を磁力線で表現することが可能なだけです。磁束密度という名称は磁力線密度の名残です。

第二のマクスウェル方程式(3.3)を第一のマクスウェル方程式

$$\nabla \mathbf{D} = \rho \quad (3.1)$$

と比較すると、(3.3)は磁荷密度の値がゼロであることを主張している。(3.3)の右辺のゼロは電気力線の電荷に相当する磁荷 (あるいは磁気単極子) が見当たらないという経験事実に対応している。

磁場 \mathbf{H} と磁束密度 \mathbf{B} との関係は、

$$\mu \mathbf{H} = \mathbf{B}$$

です。透磁率 μ も、一般にはテンソルですが、等方性媒質ではスカラーです。磁束密度 \mathbf{B} は連続なので、透磁率 μ に跳びがあるところでは磁場 \mathbf{H} は不連続です。

後の物性物理では、磁気分極 \mathbf{M} を使って

$$\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}$$

あるいは

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (3.4)$$

とすると、

$$\mathbf{M} = (\mu - \mu_0) \mathbf{H} = \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu}\right) \mathbf{B}$$

です。 μ_0 は真空の透磁率です。 $\mu \gg \mu_0$ では

$$\mathbf{B} \simeq \mathbf{M} \Leftrightarrow \mathbf{H} \simeq 0$$

です。強磁性体では $\mu \gg \mu_0$ なので、 $\mathbf{B} \simeq \mathbf{M}$ です。

電束密度 \mathbf{D} との類推により、磁束の単位は単位面積あたりの磁荷を意味する。しかし、磁荷（あるいは磁気単極子）には実態が無い。形式的に、磁荷の単位を[ウェーバー]とすると、磁束密度 \mathbf{B} の単位は[ウェーバー/面積]です。電荷の無い真空中でも電気力線をイメージして電束密度の単位に電荷が含まれているように、磁力線をイメージする磁束密度の単位[ウェーバー/面積]に磁荷が含まれている。

電束密度や磁束密度という言葉とその単位には、現在でも、電荷や磁荷が潜んでいる。電位や磁位はポテンシャル論の名残りです。

最近では、磁束密度 \mathbf{B} の単位を[テスラ]と呼び、[ウェーバー/面積]を避けることが多い。磁束密度の単位名テスラは、1890年代に交流発電機を発明し、変圧器を使って、現在の交流送電に道を開いたテスラ（N.Tesla、1856-1943年）に因む。

余談ですが、磁束密度の簡便な測定器はガウスマーターと呼ばれている。この名称も歴史的遺物です。20世紀中頃まで使われていたc.g.s単位系では、静電場にはc.g.s.静電単位系を、静磁場にはc.g.s静磁単位系だった。このc.g.s静磁単位系では磁束密度の単位は数学者ガウス（Carolus Fridericus Gauss、1777-1855年）に敬意を表してガウスだった。現在の単位系にあわせるなら磁束密度の測定器はテスラメーターです。

電磁気学の単位系は時代により変化した。ヘヴィサイドは電磁気学のc.g.s単位系を有理化することを提唱した（1892年）。有理化を初めて採用したジョルジ（Giovanni Giorgi、1871-1950年）が1901年にジョルジ単位系を提案した。このジョルジ単位系は後のMKSA単位系のもとになった。MKSA単位系は、力学の単位系であるMKS単位系を電磁気学にも対応する実用単位系とし、1948年の国際電気標準会議（IEC）で採択された。1960年の第11回国際度量衡総会（CGPM）で採択された国際単位系（SI）はMKSA単位系を引き継いだ。

3.1.3 アンペールの法則

半径 r_0 の長い直線状導線に流れている電流を I とする。導線の外 ($r \geq r_0$) の磁力線は、電線の芯を中心とする同心円状で、磁束密度 \mathbf{B} は電線の中心からの距離 r に反比例する： $\mathbf{B} \propto 1/r$ 。

磁場 $\mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B}$ の循環

$$\Gamma \equiv \oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{H} d\mathbf{S}$$

を考える。ここで、線積分の積分路 C は閉曲線で、面積分 S の縁です。等号はベクトル解析のストークスの定理です。半径 r の円周 $2\pi r$ を線積分の積分路 C に選び、 $d\mathbf{l}$ と \mathbf{H} の向きは同じとすると

$$\Gamma = 2\pi rH = \mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$$

です。ここで H は磁場の大きさです。 \mathbf{S} は大きさが面積分の面積 πr^2 の法線ベクトルで、 \mathbf{S} と $\nabla \times \mathbf{H}$ の向きは同じです。

アンペールの法則は

$$\Gamma = I$$

です。ベクトル表現では

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$$

です。ここで \mathbf{j} は電流密度（単位面積を通過する電流）を表すベクトルです。任意のベクトル \mathbf{A} に関わる数学公式

$$\nabla(\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

に注意すると、アンペールの法則(3.5)がなり立つのは

$$\nabla \mathbf{j} = 0$$

つまり、電流密度 \mathbf{j} が連続の場合に制限されている。同じことですが、アンペールの法則で扱う電流は直流なので、電流密度は連続です。

アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$ からは、

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \tag{3.5}$$

です。これもアンペールの法則です。

力線を定常流の流線に対応させると。磁束密度 \mathbf{B} の渦度（うずど、vorticity）である $\nabla \times \mathbf{B}$ は電流密度 \mathbf{j} に比例する。 $\mu \mathbf{j} = 0$ のところは渦無しです。電線の外部では電流密度 \mathbf{j} がゼロなので渦無しですが、電線の内部は電流密度 \mathbf{j} が有限なので渦有りです。

アンペールの法則(3.5)は導線の外での経験則です。導線の内部での電流密度 \mathbf{j} の分布は問わない。導線を幾何学的な線と把握することは、惑星の公転運動を議論する際に太陽や惑星を質点とする力学の伝統でしょう。公転運動を議論するには、惑星や太陽は中空の球面でも差し支えないのです。

アンペールの法則(3.5)のベクトル表現 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}$ を直感的に理解するために、台風をイメージしてみよう。気象衛星からの画像で判るように、台風は巨大な空気の渦であり、空気は台風の目の周りではほぼ円運動を行う。

風速 \mathbf{u} の大きさ u は台風の中心からの位置 \mathbf{r} に依存する。台風の目の半径を r_0 とすると、 u の \mathbf{r} 依存性は目の中 ($r \leq r_0$) と目の外 ($r \geq r_0$) とで異なる：

目の中 ($r \leq r_0$) では $u \propto r$ すなわち 比 u/r は一樣

目の外 ($r \geq r_0$) では $u \propto 1/r$ すなわち 積 ur は一樣

同じことだが、 $r = r_0$ での風速の大きさを u_0 とすると、

目の中 ($r \leq r_0$) では $u/u_0 = r/r_0$ すなわち $u/r = u_0/r_0$

目の外 ($r \geq r_0$) では $ru = r_0u_0$ すなわち $ur = u_0r_0$

です。図3.1に流速 \mathbf{u} の大きさ u の \mathbf{r} 依存性を模式的に図示した。

単位質量あたりの角運動量は $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{u}$ です。角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は大きさが u/r で向きが角運動量 \mathbf{L} と同じベクトルです。 $\mathbf{L}_0 \equiv \mathbf{r}_0 \times \mathbf{u}_0$ と $\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \mathbf{L}_0/r_0^2$ を使うと、目の外

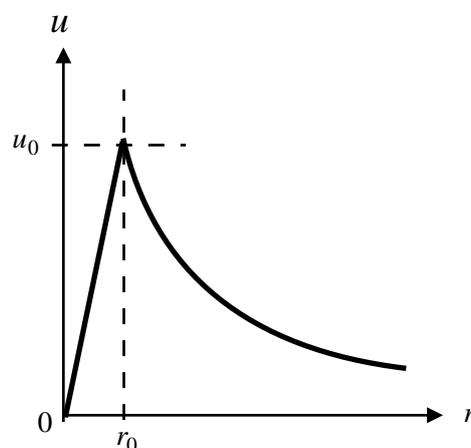


図3.1 台風の風速の大きさの分布：目の中 ($r \leq r_0$) では半径に比例する。目の外 ($r \geq r_0$) では半径に反比例する

($r \geq r_0$) では角運動量が一定です： $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 = \omega_0 r_0^2$ 。台風の日の中 ($r \leq r_0$) では角速度 ω が一樣です： $\omega = \omega_0$ 。つまり、日の中の空気は角速度 ω_0 で自転している剛体のように振る舞う。

こういうわけで、アンペールの法則(3.5)によれば、台風の目の外の風速 \mathbf{u} は磁束密度 \mathbf{B} に対応し、台風の日は半径 r_0 の電線に対応する。台風の日の中の強い上昇気流は電線に流れている電流 $\mathbf{I} = \pi r_0^2 \mathbf{j}$ に対応する。

アンペールの法則(3.5)に、

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (3.4)$$

を使うと、

$$\mu_0 \nabla \times \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{M} = \mu \mathbf{j}$$

すなわち

$$\mathbf{j} = \frac{\mu_0}{\mu} \nabla \times \mathbf{H} + \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{M}$$

となる。 $\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{M}$ は磁化電流密度です。永久磁石は磁気分極 \mathbf{M} が時刻に依らず一定です。

アンペールの法則(3.5)は抽象的な磁束密度 \mathbf{B} と電流密度 \mathbf{j} との関係を表す経験式です。(3.5)にも磁力線イメージが不要です。ファラデーはベクトル積の代わりに、電流に纏いつく磁力線をイメージしたのだろう。

磁場 \mathbf{H} を観測して得た電流密度と磁化電流密度とは区別がつかない。電線を通る電流は多少とも発熱を伴うが、永久磁石の磁化電流は発熱しない。超伝導電流と磁化電流には発熱を伴わないという共通点がある。

3.1.4 電磁場のエネルギー

電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{H} とは、ファラデーにとっては、それぞれ、電気力管と磁力管の単位断面積あたりの張力です。

19世紀前半にはエネルギー概念が拡張されて力学的エネルギーと熱エネルギーとの和をエネルギーと呼ぶようになり、19世紀中頃に熱力学第一法則が確立された。電磁場のエネルギーという概念も19世紀の風潮の表れでしょう。

電場**E**と磁場**H**とを導入することで、力線の性質を電磁場のエネルギーと結びつけたり、透磁率 μ を導入したのはケルヴィン郷トムソン (W.Thomson、1824-1907年) とされる。トムソンならでは数学的美しさはマクスウェルに力線概念からの卒業を促した。

電場のエネルギー密度は、単位体積あたりの電場のエネルギーなので、電場の圧力です。この圧力が電気力線間の斥力に対応する。

電場のエネルギー密度は、誘電率 ϵ の等方性媒質では、

$$\int_0^D EdD = \epsilon \int_0^E EdE = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{ED}{\epsilon} \geq 0$$

です。

棒状磁石や電流の流れているソレノイドコイルが太くなろうとするのは磁場の圧力の表れです。同符号磁極間の斥力も磁場の圧力の表れです。

磁場のエネルギー密度すなわち磁場の圧力は、透磁率 μ の等方性媒質では、

$$\int_0^B HdB = \mu \int_0^H HdH = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{HB}{\mu} \geq 0$$

です。

電磁場のエネルギーには電場のエネルギーと磁場のエネルギーとがある。単位体積あたりの電磁場のエネルギーは

$$\frac{1}{2}\mathbf{ED} + \frac{1}{2}\mathbf{HB}$$

です。

マクスウェルの静電磁気学は、ファラデーの力線概念に数学的表現を与えて力線イメージを払拭しただけですが、ファラデーの力線イメージが電磁場概念へと変化した。

マクスウェルは、電磁場を「空に蜘蛛の巣を張り巡らす (weaves a web through the sky)」と表現しているので、マクスウェルの電磁理論は「空に張り巡らされた蜘蛛の巣」を議論したことになる。蜘蛛の巣は中心から伸びる放射状の糸と同心円状の糸が織りなす。放射状の糸と同心円状の糸とは、それぞれ、電気力線と磁力線とに対応させたのだろう。2種類の力線に対応する2種類の糸の張力により、風の中でも、変形しながら蜘蛛の巣が保たれる。蜘蛛の巣には変形に対応する応力がそなわっている。電磁場の変形に対応する応力はマクスウェルの応力と呼ば

れている。マクスウェルの応力を議論するにはテンソル解析が便利だが、ここでは議論しない。後に発展した電磁気学に支えられて現代のworld wide webが存在することも感慨深い。

電荷と電流とを基本概念とする静電磁気学では、電荷は電束密度**D**の特異点であり、電流は磁束密度**B**の特異線です。

3.1.5 静電磁気学に関わる物理量の単位

静電磁気学に現れる物理量の単位を表3.1にまとめた。単位系はMKSA系です。

電流の単位[アンペア]を使うと、電荷の単位[クーロン]は[アンペア・時間]です。電流の線密度**j**の単位は[アンペア/面積]なので、磁場**H**の単位は[アンペア/長さ]です。磁束密度**B**の単位[テスラー]は[ボルト・時間/面積]に等しく、磁束密度**B**の単位が[ウェーバー/面積]だったことを思い出すと、磁荷の単位[ウェーバー]は[ボルト・時間]に等しい。

エネルギーの単位ジュールすなわち[J]=[V・A・s]を使って表現した第3列では、静電場に関わる量にはボルト[V]が現れ、静磁場に関わる量にはアンペア[A]が現れている。エネルギーの単位ジュールを使うと、静電場に関わる量と静磁場に関わる量との見分けが容易になる。

電磁気学の物理量	単 位	
電荷密度 ρ	$A \cdot s \cdot m^{-3}$	$J \cdot V^{-1} \cdot m^{-3}$
電束密度 D	$A \cdot s \cdot m^{-2}$	$J \cdot V^{-1} \cdot m^{-2}$
電場の強さ E	$V \cdot m^{-1}$	$V \cdot m^{-1}$
誘電率 ϵ	$A \cdot s \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}$	$J \cdot V^{-2} \cdot m^{-1}$
電流密度 j	$A \cdot m^{-2}$	$A \cdot m^{-2}$
磁束密度 B	$V \cdot s \cdot m^{-2}$	$J \cdot A^{-1} \cdot m^{-2}$
磁場の強さ H	$A \cdot m^{-1}$	$A \cdot m^{-1}$
透磁率 μ	$V \cdot s \cdot A^{-1} \cdot m^{-1}$	$J \cdot A^{-2} \cdot m^{-1}$

表3.1 MKSA単位系での電磁気学の物理量の単位：**E/B**と**H/D**と**j/ρ**の単位はいずれも[m/s]です。 $1/\sqrt{\epsilon\mu}$ の単位は[m/s]=[速度]です。エネルギーの単位ジュール[J]=[V・A・s]を使って表現した第3列では、電場に関わる量にはボルト[V]が現れ、磁場に関わる量にはアンペア[A]が現れている。

\mathbf{E}/\mathbf{B} と \mathbf{H}/\mathbf{D} と \mathbf{j}/ρ と $1/\sqrt{\epsilon\mu}$ とは、いずれも、[速度]の単位をもつ。目の子で判るように、 \mathbf{E}/\mathbf{B} と \mathbf{H}/\mathbf{D} と \mathbf{j}/ρ の単位はいずれも $[\text{m} \cdot \text{s}^{-1}] = [\text{速度}]$ です。また、 $1/\sqrt{\epsilon\mu}$ の単位は $[\text{m} \cdot \text{s}^{-1}] = [\text{速度}]$ です。なぜなら、誘電率 ϵ の単位は $[\text{J} \cdot \text{V}^{-2} \cdot \text{m}^{-1}]$ であり、透磁率 μ の単位は $[\text{J} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{m}^{-1}]$ だからです。

静電磁気学に現れる物理量を使って[速度]の単位をもつ量が作れることは、この物理量が、静電磁気学だけでなく、動電磁気学にも使えることを示唆している。

3.2 動電磁気学

電束密度 \mathbf{D} と磁束密度 \mathbf{B} が時刻に依存する場合の電磁現象を動電磁気現象と呼ぶことにする。マクスウェルは、電磁気現象に関わる第三論文“A dynamical theory of the electromagnetic field”を学会で発表し（1864年12月28日）、翌1865年に論文として出版した。この論文の表題からも判るように、マクスウェルは電磁気現象を動力学（dynamics）の立場で理解しようとした。この論文は、電磁場の時刻依存性を議論し、電磁波の存在を予言したことでも有名です。

第一のマクスウェル方程式

$$\nabla \mathbf{D} = \rho \quad (3.1)$$

と第二のマクスウェル方程式

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (3.3)$$

とは動電磁気現象でも成り立つとする。

磁束密度 \mathbf{B} や電束密度 \mathbf{D} が時刻に依存する動電磁気現象では、電荷密度 ρ も時刻に依存する。(3.1)によれば、

$$\nabla \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.6)$$

となるからです。

3.2.1 電荷保存則

電荷密度 ρ の時間変化 $\partial\rho/\partial t$ に着目したマクスウェルは、新たに電荷保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = 0$$

を導入した。右辺の零は電荷が不生不滅であることを意味する。静電磁気現象（ $\partial\rho/\partial t = 0$ ）の電荷保存則は電流密度 \mathbf{j} の連続性 $\nabla \mathbf{j} = 0$ です。

マクスウェルは電荷と電流とを独立な基本概念とすることを拒否した。なぜなら電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{j} とは電荷保存則(3.7)を満足する関係概念だからです。

マクスウェルも「電流は電荷の移動」とした。次元解析から明かなように、電流密度 \mathbf{j} は電荷密度 ρ に比例し、比例係数 \mathbf{j}/ρ は[速度]の次元を持つ。速度の次元を持つ量を \mathbf{v} とすると、電荷保存則は

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$$

を意味する。[速度]の単位をもつ $\mathbf{v} = \mathbf{j}/\rho$ は電荷の移動速度です。

電荷保存則に(3.6)を使うと

$$\nabla \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) = 0 \quad (3.7)$$

となる。(3.7)も電荷保存則です。

電荷保存則はファラデーの力線イメージには含まれていない。マクスウェルの電磁気学は、ファラデーの力線イメージを払拭しただけでなく、電荷保存則を含めた。この意味でもマクスウェルは師ファラデーを越えた。

3.2.2 ファラデー・マクスウェルの式

磁石が運動している場合のように、磁束密度 \mathbf{B} が時刻に依存する場合には、電荷が無くても電場 \mathbf{E} が出現する。ファラデーの電磁誘導の法則(1831年)によれば、磁束の時間変化 $\partial \mathbf{B} / \partial t$ は電場 $\mathbf{E} = \epsilon^{-1} \mathbf{D}$ が誘導される。ベクトル表現ではファラデー・マクスウェルの式

$$\nabla \times \mathbf{D} = -\epsilon \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.8)$$

となる。右辺の負号は電磁誘導の実験結果です。第三のマクスウェル方程式は(3.8)です。

ファラデー・マクスウェルの式(3.8)に

$$\epsilon \mathbf{E} = \mathbf{D} \quad (3.2)$$

を使うと、馴染みの表現

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

あるいは

$$\nabla \times (-\mathbf{E}) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

になる。この表現の \mathbf{E} がファラデーの誘導起電力です。

ベクトル量は向きと大きさを伴う。ベクトル量の向きについては、右ネジの法則を表すアンペールの法則

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}$$

に対して、電磁誘導の実験結果に対応するファラデー・マクスウェルの式(3.8)の右辺の負号は、左ネジの法則を表す。このことを暗記するための手立てがフレミング(J.Fleming、1849-1945年)の左手の法則(1890年頃)です。

ファラデー・マクスウェルの式(3.8)に依れば、等方性媒質中では \mathbf{D} と \mathbf{B} とは直交している。また、電束密度 \mathbf{D} は、静磁場 $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ では渦なし($\nabla \times \mathbf{D} = 0$)ですが、動磁場 $\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$ では渦あり($\nabla \times \mathbf{D} \neq 0$)です。

ファラデー・マクスウェルの式(3.8)は磁束密度 \mathbf{B} の時間変化 $\partial \mathbf{B} / \partial t$ が原因で電場 \mathbf{E} が誘導されるとか、あるいは、磁束密度 \mathbf{B} の時間変化 $\partial \mathbf{B} / \partial t$ の原動力は $-\nabla \times \mathbf{E}$ であるというような因果関係ではない。(3.8)は磁力線の運動方程式でもない。

次元解析から明らかのように、電場 \mathbf{E} は磁束密度 \mathbf{B} に比例し、比例係数 \mathbf{E} / \mathbf{B} は[速度]の次元を持つ。速度の次元を持つ量を \mathbf{v} とすると、ファラデー・マクスウェルの式は

$$\mathbf{E} \propto -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

です。この \mathbf{v} は何を意味するのか？

3.2.3 アンペール・マクスウェルの式

アンペールの法則

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad (3.5)$$

は静電磁気現象($\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$)の経験則であり、電流密度 \mathbf{j} の連続性($\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$)が仮定されていた。動電磁気現象($\partial \mathbf{D} / \partial t \neq 0$)では修正拡張する必要がある。

第四のマクスウェル方程式はアンペール・マクスウェルの式

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) \quad (3.9)$$

です。(3.9)は、形式的には(3.5)の \mathbf{j} を $\partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{j}$ に置き換えたただけですが、 $\nabla(\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ を使うと、電荷保存則

$$\nabla \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) = 0 \quad (3.7)$$

が得られる。同じことですが、アンペール・マクスウェルの式(3.9)は、電荷保存則(3.7)を使って、静電磁気現象のアンペールの法則を動電磁気現象に拡張したものです。。

アンペール・マクスウェルの式(3.9)は、 $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$ の場合には静電気現象のアンペールの法則(3.5)になる。電流が無い ($\mathbf{j} = 0$) 場合には

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

となる。これは、電気力線の運動方程式ではない。

次元解析から明かなように、磁場 \mathbf{H} は電束密度 \mathbf{D} に比例し、比例係数 \mathbf{H}/\mathbf{D} は[速度]の次元を持つ。速度の次元を持つ量を \mathbf{v} とすると、 $\mathbf{j} = 0$ の場合には、

$$\mathbf{H} \propto \mathbf{v} \times \mathbf{D}$$

です。この \mathbf{v} は何を意味するのか？

3.2.4 電磁波

ファラデーにとっては、電気力線や磁力線などの力線が電磁気現象の主役であり、電荷や電流は電磁気現象の脇役に過ぎない。何故なら、電荷は電気力線の両端にすぎないし、電流は磁力線という閉曲線に囲まれた領域の芯にすぎないからです。力線イメージに固執したファラデーには、

「電荷という名の特異点と電流という名の特異線を除く全空間に
広がる力線により広大な空間の電磁氣的性質が決まる」

との強い信念がある。

力線概念を通して、電荷や電流から、電気力線や磁力線の張る空間に視点を移したファラデーにとっては、真空といえども、電気力線や磁力線の張る空間です。

師ファラデーに倣って電荷密度 ρ にも電流密度 \mathbf{j} にも執着しないマクスウェルは、電荷も電流もない空間 ($\rho = 0$ かつ $\mathbf{j} = 0$) を想定することが出来た。

電荷も電流もない空間 ($\rho = 0$ かつ $\mathbf{j} = 0$) 中の電磁波を議論しよう。 $\mathbf{j} = 0$ の場合のアンペール・マクスウェルの式(3.9)から

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}$$

となり、ファラデー・マクスウェルの式(3.8)からは

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{D} = -\epsilon_0 \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

となる。両者から、 $\nabla \times \partial \mathbf{B} / \partial t$ を消去すると

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

となり、 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ を消去すると

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = 0$$

となる。

いずれも位相速度 $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ で伝播する横波の波動方程式です。前者は \mathbf{E} の横波で、後者は \mathbf{H} の横波です。いずれにしても、電磁波は電磁場の横波です。マクスウェルは光を電磁波と見做した。当時の実験データを使うと、 $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ の値が光速に近かったからです。

こうして[速度]の単位をもつ $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ が真空中の光速を意味することが判明した。等方性媒質を伝播する光速は $1/\sqrt{\epsilon \mu}$ です。

[速度]の単位をもつ \mathbf{E}/\mathbf{B} と \mathbf{H}/\mathbf{D} の意味は未だ不明のままです。

マクスウェルが電磁波の存在を予言したのは1864年論文です。電磁波との用語を使ったのもこの論文が最初です。3年後の1867年の8月にマクスウェルの師ファラデーは75歳で生涯を閉じた。

マクスウェルは1871年3月18日にケンブリッジ大学で実験物理学の初代教授となり、電磁気学に関する研究の集大成として著書”A treatise on electricity and magnetism” (Oxford : Clarendon Press、1873年) を発表し、光が電磁気現象であることを明言した。また、キャヴェンディッシュ研究所設立に貢献し、1874年6月16日開所と同時に初代所長となった。5年後の1879年にマクスウェルは48歳で他界した。

電気回路と電信を独学で研究していたヘヴィサイド (O.Heviside、1850-1925年) は23歳でマクスウェルの著書”A treatise on electricity and magnetism” (Oxford : Clarendon Press、1873年) に会おうと伝送線の研究にのめり込み、1880年には同軸ケーブルを発明した。

ヘヴィサイドが、ベクトル解析を使って多数のマクスウェル方程式を4つのマクスウェル方程式に纏めたのは1884年のことです。

後に、電信方程式を調べるに当たり開発した（1880-87年）演算子法はヘヴィサイドの演算子法と呼ばれている。ヘヴィサイドの演算子はラプラス変換とほとんど同じです。

3.3 ポインティングベクトル

マクスウェルの弟子ポインティング（J.H.Poynting, 1852-1914年）によれば単位面積を単位時間に通過する電磁場のエネルギー、すなわち、電磁場のエネルギー流密度は

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

です（1884年）。 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{H} とに直交している。 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ の湧き出しは

$$\nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

です。 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ はポインティングベクトルと呼ばれている。

単位面積を単位時間に通過する電磁場の運動量、すなわち、電磁場の運動量流密度は、光速 $c \equiv 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ を使うと、

$$\frac{1}{c}\mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

です。光速 $c \equiv 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ を使うと、電磁場の運動量の湧き出しは

$$\nabla\left(\frac{1}{c}\mathbf{E} \times \mathbf{H}\right)$$

です。

導体中を移動する電荷の速さは光速 c に比べると遥かに小さい。電磁場のエネルギーや運動量が移動するのは、導体をガードレールとする導体の外の空間が主です。導体の中では電磁場のエネルギーが散逸しジュール発熱する。ジュール発熱が小さくなるように電気伝導度の大きい導体を使うと、表皮効果により、電流も磁場も導体の表面近くに制限される。

例えば、電磁場のエネルギーや運動量を伝送する際に、同軸ケーブルを使うと、電磁場のエネルギーや運動量が伝わるのは、主に、芯線と外被導体との間の絶縁体中です。

電磁波のエネルギー流密度はポインティングベクトル $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ の時間平均

$$\langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle_t$$

です。電磁波の運動量流密度は

$$\frac{1}{c}\langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle_t$$

です。

電荷も電流もない ($\rho = 0$ かつ $\mathbf{j} = 0$) ところでは、電磁波のエネルギーが散逸されないので、エネルギー保存則

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \rangle_t + \frac{1}{2} \langle \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \rangle_t \right] + \nabla \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle_t = 0$$

が成立つ。

ポインティングにより電磁気学の力学化が完成したとされる。ポインティングベクトルにより、電磁場のエネルギー流や運動量流が議論できるようになったからです。

また、ボルツマン (L.E.Boltzmann, 1844.2.20-1906.9.5) は黒体放射に関わるシュテファンの法則 (1879年) を解釈した (1885年)。この際にボルツマンはポインティングベクトルを採用した。後にこのボルツマンの仕事はローレンツ (H.A Lorentz, 1853-1928年) により「理論物理学の真珠」と称えられた。

ヘルツの実験 (1886-88年) によりヘルツ (H.R.Hertz, 1857-94年) は電磁波の存在を確認した。電磁波が、偏光を含めて、光とまったく同じ性質をもっていることを示したヘルツの実験⁶は光の波動説の確かな根拠となった。

ヘルツの実験の実用的価値をヘルツは理解していなかった。ヘルツによれば「それは何の役にも立っていない……単にマクスウェル先生が正しかったことを証明しただけの実験だ。我々の肉眼では見えない不思議な電磁波は確かに存在する。しかし、単に存在するだけだ」。

しかし、ヘルツの実験はその後の無線通信時代をもたらした。このヘルツに因み周波数の単位名はヘルツHzとなった (1930年)。

ヘルツの実験から6年後にヘルツは36歳の若さで他界した。

3.4 表皮効果の定式化：マクスウェルの電磁気学の応用例

ヘヴィサイドによる伝送線の研究のもう一つの成果はケルヴィン郷トムソンによる表皮効果の定式化 (1887年) です。少し複雑だがここで紹介する。数式に目がくらむ人は飛ばして差し支えない。

誘電率 ϵ と透磁率 μ とが一様な場合を議論する。

⁶ 霜田光一：『歴史をかえた物理実験』（丸善、1993）4章

ファラデー・マクスウェルの式

$$\nabla \times \mathbf{D} = -\epsilon \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.8)$$

は電束密度 \mathbf{D} と磁束密度 \mathbf{B} との関係です。これを電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{H} との関係に書き換えると

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3.10)$$

です。

アンペール・マクスウェルの式

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (3.9)$$

は電束密度 \mathbf{D} と磁束密度 \mathbf{B} と電流密度 \mathbf{j} との関係です。これを磁場 \mathbf{H} と電場 \mathbf{E} と電流密度 \mathbf{j} の関係に書き換えると

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.11)$$

です。

磁場 \mathbf{H} と電場 \mathbf{E} と電流密度 \mathbf{j} という3つの量の間の関係は(3.10)と(3.11)の2つでは足りない。 $\mathbf{j} = 0$ の場合には、 \mathbf{H} と \mathbf{E} という2つの量の間の関係なので(3.10)と(3.11)の2つで充分であり、電磁波を議論することが出来ただけです。

一様温度 $\nabla T = 0$ の導体に電流密度 \mathbf{j} の電流が流れていると、導体中では電気伝導度を σ とするオームの法則

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.12)$$

が成り立つ。これは一様温度 $\nabla T = 0$ の場合です。 $\nabla T \neq 0$ の場合には熱起電力（ゼーベック起電力）が存在するからです。オームの法則(3.12)は電流密度 \mathbf{j} と電場 \mathbf{E} との関係です。

アンペール・マクスウェルの式(3.11)は、導体中ではオームの法則(3.12)により

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.13)$$

となる。ここで ϵ は導体の誘電率である。導体中のアンペール・マクスウェルの式(3.5)は磁場 \mathbf{H} と電場 \mathbf{E} との関係です。

こうして、導体中では磁場 \mathbf{H} と電場 \mathbf{E} という2つの量の間の2つの関係(3.10)と(3.13)とが得られた。

導体中のアンペール・マクスウェルの式(3.13)を議論するにあたり、電場や磁場が角周波数 ω で振動している場合を想定する。時刻依存性を $e^{i\omega t}$ とすると、導体中では

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left(1 + i\omega \frac{\epsilon}{\sigma}\right) \sigma \mathbf{E}$$

となる。これは低周波数 $\omega\epsilon/\sigma \ll 1$ では、良い近似で、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.14)$$

となる。

導体を銅とすると $\epsilon/\sigma \sim 10^{-18}$ sです。通常の電子工学の周波数範囲（ 10^{12} ヘルツ以下）では $\omega\epsilon/\sigma \ll 1$ なので、導体中のアンペール・マクスウェルの式(3.5)の代わりにその低周波数近似(3.14)を使う。(3.14)は、導体中のアンペール・マクスウェルの式(3.5)の低周波数近似なので、準定常状態のアンペール・マクスウェルの式とも呼ばれる。

こういうわけで、超伝導体を除く導体中では、電流密度 \mathbf{j} と電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{H} という三変数の従うべき基本方程式は、オームの法則

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.12)$$

と導体中のアンペール・マクスウェルの式(3.13)の低周波数近似

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.14)$$

とファラデー・マクスウェルの式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3.10)$$

の三方程式です。

(3.14)と(3.10)から \mathbf{E} を消去すると

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\sigma\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3.15)$$

となる。(3.14)と(3.10)から \mathbf{H} を消去すると

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\sigma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.16)$$

となる。

任意のベクトル \mathbf{A} について成り立つベクトル解析の公式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

によれば、 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ の場合には

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A}$$

です。

μ が一様の導体中では、第二のマクスウェル方程式(3.3)により $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ なので、 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\nabla^2 \mathbf{H}$ です。従って、(3.15)は

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3.17)$$

です。ε一様の導体中では、第一のマクスウェル方程式(3.1)とρ = 0とを使うと、∇E = 0なので、∇ × (∇ × E) = -∇²Eです。従って、(3.16)は

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.18)$$

です。σ一様の導体中では、(3.18)とオームの法則(3.12)を使うと

$$\nabla^2 \mathbf{j} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \quad (3.19)$$

です。

(3.17)と(3.18)と(3.19)は全て同じ形の偏微分方程式です。解の形をexp i(ωt - kx)とすると

$$-k^2 = i\omega\sigma\mu$$

なので、

$$k = \frac{\sqrt{-2i}}{\delta} = (1 - i)\frac{1}{\delta}$$

です。ここで

$$\delta \equiv \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} > 0$$

はこの形の偏微分方程式を特徴づける長さで、角周波数ωの減少関数です。解の形

$$\exp i(\omega t - kx) = \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) \exp i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

はrの増大につれて振幅が増大することを示している。導体表面をx軸の原点とし、導体はx < 0、真空はx > 0とすると、電磁場や電流密度は導体表面からδ程度の領域に集中している。このことを電気工学では表皮効果と呼び、このδを表皮の厚さと呼ぶ。

表皮の厚さδを粗く評価してみよう。室温の銅ではσ ~ 10⁸ Ω⁻¹m⁻¹です。μの代わりに真空の透磁率μ₀ = 4π × 10⁻⁷ NA⁻²を使うと、σμ ~ 4π × 10¹ m⁻²sです。これを使うと、1MHz (ω = 2π × 10⁶ s⁻¹) ではδ ~ 50 μm、10 kHzではδ ~ 0.50 mm、100 Hzではδ ~ 5.0 mmです。

なお、誘導加熱用のコイルやラジオの同調回路に使われるコイルに非常に細かいエナメル被服銅線や絹巻き銅線をより合わせたリッツ線が使われるのは表皮効果と線間の近接効果を考慮した結果です。

よく使われる断面形状が円の導線に対応して、半径 r_0 の円柱状の長い導体を想定する。電流密度 \mathbf{j} や電場 \mathbf{E} の向きが円柱の軸方向（ z 方向）で軸対称の場合には、 z 成分 j_z と E_z だけが有限です。なぜなら、任意のベクトル \mathbf{A} について

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\(\nabla \times \mathbf{A})_\varphi &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\(\nabla \times \mathbf{A})_z &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right]\end{aligned}$$

だからです。

(3.18)と(3.19)の解は円筒座標で

$$j_z = \sigma E_z = \frac{J_0(kr)}{\langle J_0(kr) \rangle_r} \frac{I}{\pi r_0^2} \quad (3.20)$$

ただし

$$k = \frac{\sqrt{-2i}}{\delta} = (1-i) \frac{1}{\delta} = (1-i) \sqrt{\omega \frac{\sigma \mu}{2}}$$

です。ここで、 $I \propto \exp i\omega t$ はこの導体の断面を通る全電流です。 $J_n(x)$ は n 次のベッセル関数です。

$$\langle J_0(kr) \rangle_r \equiv \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} J_0(kr) 2\pi r dr = 2 \int_0^1 J_0(kr_0 z) z dz$$

は $J_0(kr)$ の断面平均です。ベッセル関数の積分公式

$$\lambda \int_0^1 x J_0(\lambda x) dx = J_1(\lambda)$$

を使うと、

$$\langle J_0(kr) \rangle_r \equiv \frac{2}{kr_0} J_1(kr_0)$$

です。ベッセル関数の積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt$$

を使うと

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$$

は x の偶関数なので、円柱の軸 $r = 0$ は特異点ではない。また

$$J_0(0) = 1$$

です。円柱の軸 $r = 0$ が特異点ではないので、(3.20)は妥当な解です。

半径 r_0 の導線の特徴づける時定数

$$\tau \equiv \frac{\sigma\mu}{2}r_0^2$$

を導入すると、

$$kr_0 = (1-i)\sqrt{\omega\tau}$$

です。

(3.20)によれば、 r に依存するのは $J_0(kr)$ です。円柱表面上での値

$$j_z(r_0) = \frac{J_0(kr)}{\langle J_0(kr_0) \rangle_r} \frac{I}{\pi r_0^2}$$

$$E_z(r_0) = \frac{1}{\sigma} \frac{J_0(kr)}{\langle J_0(kr_0) \rangle_r} \frac{I}{\pi r_0^2}$$

を使うと、

$$j_z(r) = \frac{J_0(kr)}{J_0(kr_0)} j_z(r_0)$$

$$E_z(r) = \frac{J_0(kr)}{J_0(kr_0)} E_z(r_0)$$

です。

磁場 \mathbf{H} については円周方向成分 H_ϕ だけが有限で、半径 r_0 の円柱表面上での経路積分は I に等しいので、円柱表面上での値は

$$H_\phi(r_0) = \frac{I}{2\pi r_0}$$

です。従って、

$$H_\phi(r) = \frac{J_0(kr)}{J_0(kr_0)} H_\phi(r_0)$$

です。

ここで

$$k = \frac{\sqrt{-2i}}{\delta} = (1-i)\frac{1}{\delta} = (1-i)\sqrt{\omega\frac{\sigma\mu}{2}}$$

と

$$\tau \equiv \frac{\sigma\mu}{2}r_0^2$$

に注意すると、

$$kr = \sqrt{-2i}\frac{r}{\delta} = (1-i)\frac{r}{\delta} = (1-i)\sqrt{\omega\tau}\frac{r}{r_0}$$

$$kr_0 = \sqrt{-2i}\frac{r_0}{\delta} = (1-i)\frac{r_0}{\delta} = (1-i)\sqrt{\omega\tau}$$

です。

電磁場は導体表面から表皮の厚さ δ 程度までしか侵入しない。 $r \simeq r_0$ では

$$\frac{J_0(kr)}{J_0(kr_0)} \propto \frac{\exp(-ikr)}{\exp(-ikr_0)} = \exp[ik(r_0 - r)] = \exp\left[(1+i)\frac{r_0 - r}{\delta}\right]$$

だからです。電磁場の侵入深さの目安としての表皮の厚さ δ という概念は $\delta < r_0$ では意味があるが、 $\delta > r_0$ では無意味である。

導体中の電磁エネルギーの散逸を特徴づける時定数

$$\tau \equiv \frac{\sigma\mu}{2}r_0^2$$

を導入すると、ジュール発熱による1周期あたりのエネルギー散逸は

$$\omega\tau = \left(\frac{r_0}{\delta}\right)^2$$

に反比例する。これを使うと $r \simeq r_0$ では

$$\frac{J_0(kr)}{J_0(kr_0)} \propto \frac{\exp(-ikr)}{\exp(-ikr_0)} = \exp[ik(r_0 - r)] = \exp\left[(1+i)\sqrt{\omega\tau}\frac{r_0 - r}{r_0}\right]$$

です。

3.5 マクスウェルの電磁気学の問題点

マクスウェルの電磁気学により電磁気学が完成されたとき、電磁気学の教科書は二つのタイプに大別される。一つは、エルステッドによる電流の磁気作用（1820年）から始めてマクスウェルの電磁気学で終わる。第二は、総論としてのマクスウェルの電磁気学から始めて多くの演習問題を解く。電磁気学の演習問題を解くことでベクトル解析に慣れるが、電磁気学の概念的理解から遠ざかることになりかねない。計算方法を知ることと概念的理解とは別物です。

マクスウェルの電磁気学により電磁気学が完成されたわけではない。熱力学の側面がある熱電気現象を電磁気学から排除しても、力学としての電磁気学には未解決の二つの問題が遺された。

問題1 「電流は電荷の移動」は「ポテンシャル力だけを力とするニュートン力学に反する」との見解は正しいか？マクスウェルの電磁気学は電荷保存則を認めたので、「電荷」と「電流」とは独立概念ではなくなり、電荷保存則で関係付けられた関係概念になった。現代では中学校でも「電流は電荷の移動」と教わるが、マクスウェルの電磁気学とニュートン力学との間の関係をどのように理解したら良いのか？

問題2 単極誘導や単極モーターはマクスウェルの電磁気学では理解できない。電磁気学とはマクスウェルの電磁気学であると見なし、マクスウェルの電磁気学で理解できない単極誘導や単極モーターを電磁気学から排除することは容易です。組織の権力者は都合の悪い意見や人を組織から排除する傾向がある。

他方で、熱素保存則を基本法則とした熱学は熱機関をその対象外としたが、後に、エネルギー保存則を基本法則の一つとする熱力学に脱皮することで熱機関をも議論するようになった。熱学から熱力学へと進化した歴史に学ぶなら、マクスウェルの電磁気学も単極誘導や単極モーターを含む電磁気学へと進化することが期待される。

現代では、マクスウェルの電磁気学で終わりとする事無く、単極誘導を採り上げたり「電流は電荷の移動」との視点を扱う電磁気学の教科書も存在する。例えば次の3冊はいずれも個性豊かな名著です。

R.P.Feynman, R.B.Leighton & M. Sands : “The Feynman Lectures on Physics” Vol.2 Mainly Electromagnetism and matter (Addison-Wesley, 1964)

今井 功：『電磁気学を考える』（サイエンス社、1990）

砂川重信：『理論電磁気学 第3版』（紀伊國屋、1999）

4. 運動物体の電磁気学

4.1 電流は電荷の移動

19世紀前半に、アンペールやファラデーが「電流は電荷の移動」と見なしたにもかかわらず、エルステッドによる電流の磁気作用の発見後の電流と電荷とは独立な基本概念であり、「電流は電荷の移動」として定義されるものではなかった。「電流は電荷の移動」説では、電磁気学とニュートン力学とは相容れない。ニュートン力学はポテンシャル力だけをまともな力とする。電荷の移動速度に比例するアンペール力はポテンシャル力ではないからです

マクスウェルが1865年論文で導入した電荷保存則(3.7)は電流と電荷とが独立概念ではないことを示した。

「電流は電荷の移動」との説が、19世紀末に、復活してきた。新たな実験結果とアンペール力の新表現が出現したためです。

4.1.1 ローラントの実験

ローラント (H.A.Rowland、1848-1901年) によれば、摩擦電気による電荷を乗せたゴム製の円盤を回転させると近くの方角磁針が振れた。円盤が回転して見える座標系に誘導磁場 \mathbf{H}_{ind} が出現したのです。円盤の縁の速度 \mathbf{v} が大きくなると方位磁針の振れも大きくなった。このローラントの実験 (1878年、1879年) によれば

$$\nabla \times \mathbf{H}_{ind} \propto \mathbf{v}$$

です。

ゴムは絶縁体なので、ゴム製円盤の回転とともに電荷が移動する。この移動している電荷が電流と同じ磁気作用を示した。つまり、ローラントの実験は「電流は電荷の移動」であることを明示した。

4.1.2 ホール効果

ホール (Edwin H.Hall、1855-1938年) は電流の流れている物体に対し、電流に垂直に磁場をかけると、電流 \mathbf{I} と磁場 \mathbf{H} の両方に直交する方向に誘導起電力

$$\mathbf{E}_{ind} \propto \mathbf{I} \times \mathbf{H}$$

が出現した (1879年)。この現象がホール効果であり、この誘導起電力がホール起電力です。現代の磁束計用の半導体センサーはホール素子と呼ばれている。いずれも発見者ホールの名に因む。

4.1.3 アンペール力の新表現

電流の流れている二本の導線の間働くアンペール力は、電流に纏わり付く磁場を仲介として電流間に働く力と見做すことが出来る。片方の導線に流れている電流に纏わり付く磁場に着目し、この磁場による磁束密度 \mathbf{B} のところに他方の導線が置かれている。この導線に電流 \mathbf{I} が流れていると、この導線の単位長さ当たりのアンペール力は、

$$\mathbf{I} \times \mathbf{B}$$

です。ベクトル積はアンペール力が電流 \mathbf{I} と磁束密度 \mathbf{B} とに直交していることを示している。

電荷保存則を通してマクスウェルも容認した「電流は電荷の移動」との視点をヘヴィサイドも容認した。電流 \mathbf{I} を電荷 q が速度 \mathbf{v} で移動するものと見做すと、 $\mathbf{I} = q\mathbf{v}$ なので、アンペール力は

$$q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

です（ヘヴィサイド 1889年）。これがアンペール力の新表現です。アンペール力は、この新表現でも、電流が纏う磁束密度 \mathbf{B} を介した力です。

アンペール力の新表現によれば、磁束密度 \mathbf{B} であるような磁場中を速度 \mathbf{v} で運動する電荷 q には

$$\mathbf{E}_{ind} \equiv \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

だけの誘導電場が働くことをも意味する。これはホール起電力そのものです。

キャベンディッシュ研究所のJ.J.トムソン（J.J.Thomson、1856-1940年）は電子を発見し、その比電荷 e/m を測定した（1897年）。この際の、測定原理にもアンペール力の新表現が使われた。

こうして、19世紀末に「電流は電荷の移動」という説が有力になってきた。19世紀末から20世紀初頭にかけて、物理は大きな変革を遂げた。「電子の発見者」と称えられたJ.J.トムソンが1906年度ノーベル物理学賞を受賞したことは、1906年迄に「電流は電荷の移動」が認知されたことの証左でしょう。

4.2 マイケルソン・モーリーの実験：光速は不変

既に述べたように、熱電気現象などの熱力学と関わりのある現象を別にしても、マクスウェルの電磁気学では扱えない電磁気現象がある。磁束密度が時刻に依らな

くても、導体が運動すると導体中に誘導電場が生じる単極誘導はファラデー・マクスウェルの式(3.8)では理解出来ない。アンペールの単極モーターも説明できない。単極モーターや単極誘導では磁束密度 \mathbf{B} は、円盤磁石の自転とは関わりないので、 $\partial\mathbf{B}/\partial t = 0$ だからです。

単極誘導をマクスウェルの電磁気学の対象外とすることはマクスウェルの電磁気学の欠陥のひとつです。

マクスウェルの電磁気学とは別に、同じ19世紀にもう一つの電磁気学があった。波はその媒質を必要とするとの立場では、光の波動説は光を伝える媒質としての「エーテル」を必要とした。デカルト (René Descartes、1596-1650年) 以来の「エーテル」イメージに基づき運動する「エーテル」です。

光の回折現象から波動説を提唱したフレネル (A.J.Fresnel、1788-1827年) は、物体が運動すると「エーテル」が引きずられるために、物体中の光速は物体の速度に応じて変化すると考えた (1818年)。フィゾー (A.H.L.Fizeau、1819-96年) は流水中で光速測定を行いフレネルの予言を確認した (1851年)。このためにフレネル理論の結果はフレネルの随伴係数と呼ばれるようになった。

マクスウェルの電磁気学は真空中の電磁波が光速 $c \equiv 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ で伝播することを示し (1868年)、ヘルツの実験 (1886-88年) では電磁波が光と同じ性質を示すことが確認された。こうしてマクスウェルの電磁気学は絶頂期を迎えた。

マクスウェルの電磁気学のこの絶頂期にマイケルソン・モーリーの実験 (1887年) が行われた。この実験によれば、光速に及ぼす地球の自転運動や公転運動の影響が検出されない。この結果だけを尊重すると、地動説を否定し天動説に戻ることも一つの選択肢です。地動説を尊重すると、絶対静止しているエーテルは存在しないことになる。絶対静止しているエーテルが存在するなら、地球の運動によりガリレイ変換された光速が検出されるはずだからです。

絶対静止しているエーテルが存在しないとしても、光速が座標系に依らないとの実験結果は何を意味するのか？

4.3 レントゲンの実験：レントゲン電流

ローラントの実験に刺激されたレントゲン (W.C.Röntgen、1845-1923年) は、ローラントの実験の帯電体を円盤状の平行平板コンデンサーに置き換え、コンデン

サーを中心軸の回りで回転させ、径方向の誘導磁場 \mathbf{H}_{ind} を観測した（図4.1）。これがレントゲンの実験（1888年）です。電束密度 \mathbf{D} と回転軸とは反平行です。実験装置は後に述べるアイヒェンヴァルトの実験と同じです。

因みに、レントゲンが発見（1895年）したX線がX線写真として医学に役立った業績で最初のノーベル物理学賞（1901年）を受賞した。この頃にはX線の正体は謎でした。X線回折を研究したラウエ（M.T.Felix. von Laue、1879-1960年）はX線も電磁波であることを明らかにした（1912年）業績でノーベル物理学賞（1914年）を受賞した。

平行平板コンデンサーの極板間には誘電率 $\epsilon > \epsilon_0$ の誘電体が挟まれているので、レントゲンの実験は「自転している電束密度 \mathbf{D} が軸方向磁場を誘導する」と理解された。「自転している電束密度」は「電気力線の運動」の亡霊です。さらに「自転している電束密度 \mathbf{D} は電流のように見える」と解釈され、この電流はレントゲン電流と呼ばれた。

静止している磁束密度が回転導体に起電力をもたらし単極誘導がファラデー・マクスウェルの式(3.8)では説明できないように、「自転している電束密度」による軸

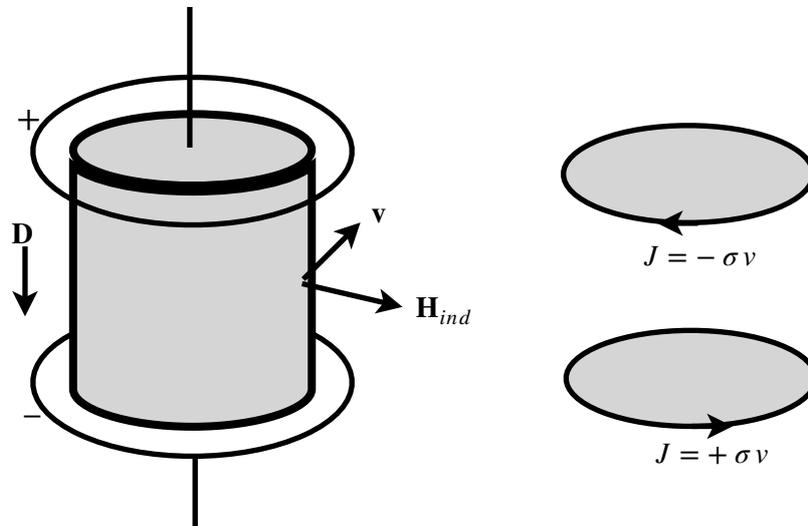


図4.1 レントゲンの実験（1888年）とアイヒェンヴァルトの実験（1903年）：円柱状誘電体を上下の円盤状導体で挟む。このキャパシターに電圧をかけて、誘電体を分極させておく。この誘電体を中心軸の周りに自転させると、径方向の磁場 H_{ind} が誘導された（左図）。「電流は電荷の運動」という立場では、誘電体の分極電荷が運動することによる電流を想定するので、円柱状誘電体の側面から外向きの磁場が出現するのはアンペールの法則の表れである（右図）。

方向磁場はアンペール・マクスウェルの式(3.5)では説明できない。アンペール・マクスウェルの式の電流密度 \mathbf{j} をレントゲン電流に置き換える必要がある。こうして、新たに「レントゲン電流とは何か」という問題も発生した。

4.4 座標変換の視点

4.4.1 ヘルツ理論

電磁波の存在と電磁波が光と同じ性質を示すことを確認したヘルツの実験(1886-88年)で有名なヘルツ(H.R.Hertz、1857-94年)は、「電流は電荷の移動」との視点を受容しただけではなく、単極誘導やレントゲン電流を座標変換の顕れと看破し、新たにヘルツ理論を提案した(1890年)。

相対速度 \mathbf{v} で運動する二つの座標系を想定する。

ヘルツによれば、電流の磁気作用とは静電場の座標変換による誘導磁場です。次元解析によれば、誘導磁場 \mathbf{H}_{ind} は静止座標系での電束密度 \mathbf{D} に比例し、比例係数 $\mathbf{H}_{ind}/\mathbf{D}$ の単位は[速度]に等しい：

$$\mathbf{H}_{ind} \propto \mathbf{v} \times \mathbf{D}。$$

従って、「電流は電荷の移動」を容認したヘルツにとっては、レントゲン電流は分極電荷の移動です。電荷が静止している座標系では電荷に伴う静電場と静電場に伴う分極電荷が存在するが、分極電荷が速度 \mathbf{v} で運動するように見える座標系では分極電荷の速度 \mathbf{v} に比例する誘導磁場 \mathbf{H}_{ind} が観測される。

さらに、ヘルツによれば、単極誘導の起電力やホール起電力 \mathbf{E}_{ind} は静磁場の座標変換です。静磁場による磁束密度 \mathbf{B} が速度 \mathbf{v} で運動するように見える座標系では速度 \mathbf{v} に比例する誘導電場 \mathbf{E}_{ind} が観測される。次元解析によれば、 \mathbf{E}_{ind} は静磁場による磁束密度 \mathbf{B} に比例し、この比例係数 $\mathbf{E}_{ind}/\mathbf{B}$ の単位は[速度]に等しい：

$$\mathbf{E}_{ind} \propto \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

座標変換という視点が欠如していたマクスウェルの電磁気学では[速度]に等しい単位をもつ \mathbf{H}/\mathbf{D} や \mathbf{E}/\mathbf{B} の意味が不明だったが、ヘルツ理論によれば、[速度]に等しい単位をもつ \mathbf{H}/\mathbf{D} や \mathbf{E}/\mathbf{B} は二つの座標系の相対速度 \mathbf{v} に比例する。

ヘルツが用いた座標変換はニュートン力学で馴染みのガリレイ変換でした。立ち止まって見る景色も自転車で走りながら見る景色も大差ない。走る車窓からみる景

色は逆方向に動いて見えるだけです。この経験則に基づく座標変換がガリレイ変換です。ガリレイ変換はニュートン力学では疑う余地の無いことでした。ニュートン力学では質量や運動量はガリレイ変換に対して不変です。

磁束密度**B**の磁場中を一定速度**v**で運動する物体には

$$\mathbf{E}_{ind} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.1)$$

だけの誘導起電力が生じるのが単極誘導です。ガリレイ変換を使ったヘルツ理論によれば、磁束密度**B**の磁場中を速度**v**で運動する座標系では(4.1)だけの電場が存在する。これが単極誘導のヘルツ理論による理解です。誘導起電力(4.1)はホール起電力と同じです。

また、ファラデー・マクスウェルの式

$$\nabla \times \mathbf{D} = -\epsilon \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.8)$$

の電束密度**D** = $\epsilon \mathbf{E}$ は、静磁束密度**B**のガリレイ変換による起電力**E**に対応する。

単極誘導を座標変換の問題と捉えたヘルツにとっては、運動する物体が導体かどうかには関係ない。磁束密度**B**の静磁場を速度**v**で運動する座標系で観測すると電場(4.1)が観測される。

レントゲンの実験（1888年）によれば、電束密度**D**の静電場の中を速度**v**で運動する物体には

$$\mathbf{H}_{ind} = \mathbf{v} \times \mathbf{D} \quad (4.2)$$

だけの誘導磁場が生じる。ガリレイ変換を使ったヘルツ理論によれば、電束密度**D**の静電場を速度**v**で運動する座標系で観測すると誘導磁場**H_{ind}** = $\mathbf{v} \times \mathbf{D}$ だけの磁場が存在する。このことも、運動する物体が導体かどうかには関係ないとした。これがヘルツ理論によるレントゲンの実験の解釈です。

また、アンペール・マクスウェルの式

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) \quad (3.9)$$

の磁束密度**B** = $\mu \mathbf{H}$ は、 $\mathbf{j} = 0$ の場合には、静電束密度**D**のガリレイ変換による誘導磁場**H**に対応する。

運動する物体が導体かどうかに関わらず(4.1)と(4.2)が成りたつことをヘルツの予言と呼ぶことにする。ヘルツ理論の詳細については、砂川重信著『理論電磁気学』（紀伊國屋書店、1999年）を参照して欲しい。

次に紹介する20世紀のアイヒェンヴァルトの実験（1903年）とウィルソンの実験（1904年）とはヘルツの予言を検証するのに役立った。

4.4.2 アイヒェンヴァルトの実験

アイヒェンヴァルト（A.A.Eichenwald、1864-1944年）はレントゲンの実験を精密にやり直した（1903年）⁷。円柱状誘電体を円盤状導体で挟んだ平行平板キャパシタに電圧をかけて、誘電体を分極させる。電気分極**P**と電束密度**D**と電場**E**とは全て中心軸と平行です。この誘電体を中心軸の周りで自転させると円柱状誘電体に径方向の強さ H_{ind} の磁場が誘導される（図4.1）。静止している誘電体を逆向きに自転している座標系で観測すると径方向の強さ H_{ind} の磁場が観測されるとも言える。

アイヒェンヴァルトの実験結果は

$$\mathbf{H}_{ind} = \mathbf{v} \times \mathbf{P} \quad (4.3)$$

だった。ここで

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \mathbf{D}$$

は誘電体の電気分極です。この ϵ は誘電率テンソルの回転軸方向成分です。速度**v**は円柱状誘電体の側面の速度です。(4.3)は速度**v**で運動する電気分極**P**と誘導磁場 \mathbf{H}_{ind} の関係を表す新たな実験式です。

レントゲン電流は、電束密度**D**に比例するのではなくて、電気分極**P**に比例した。円盤状導体も円柱状誘電体とともに自転するが、導体中の電荷は静止したままで、自転運動するのは誘電体の分極電荷だけです。「電流は電荷の移動」という立場では、分極電荷の運動による電流をレントゲン電流と解釈することになり、誘導磁場 \mathbf{H}_{ind} はアンペールの法則の表れです。

アイヒェンヴァルトの実験結果(4.3)は、 $\epsilon \gg \epsilon_0$ では、ヘルツの予言

$$\mathbf{H}_{ind} = \mathbf{v} \times \mathbf{D} \quad (4.2)$$

と区別がつかない。

⁷ A.Eichenwald : Über die magnetischen Wirkungen bewegter Körper im electrostatischen Felde, *Annalen der Physik*. **316**(5) 1-32 (1903)

4.4.3 ウィルソンの実験

ウィルソン (H.A.Wilson、1874-1964年)⁸はキャヴェンディッシュ研究所に2回所属している。一度目のキャヴェンディッシュ研究所時代 (1897-99年) にラザフォード (E.Rutherford、1871-1971年) やJ.J.トムソンの仕事に感銘を受けた。二度目のキャヴェンディッシュ研究所時代 (1901-04年) に、低圧気体中のイオンの運動をホール効果を使って調べる実験で、2本の論文を出した (1902年)。ここで紹介するウィルソンの実験 (1904年)⁹にもホール起電力 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ の影響が見える。

ファラデーの単極誘導の実験の自転する導体円盤をウィルソンは誘電体を充填した同軸状キャパシターに置き換えた (図4.2)。磁束密度 \mathbf{B} と回転軸とは平行です。

この同軸状誘電体を中心導体の周りで自転させると、中心導体と外部導体との間に電位差が出現した。この電位差から径方向の誘導電場 \mathbf{E}_{ind} が判る。静磁場中で運動する誘電体が電気分極したのです。これも新しい実験です。

ウィルソンの実験結果は

$$\mathbf{E}_{ind} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.4)$$

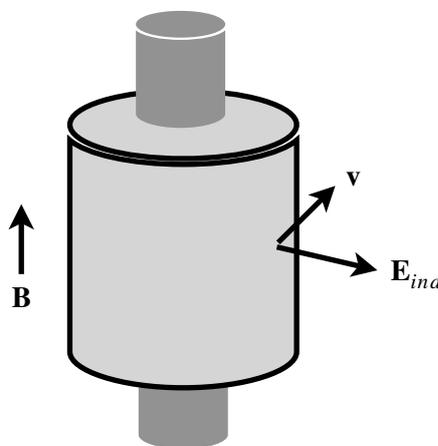


図4.2 ウィルソンの実験 (1904年) : 同軸状キャパシターの中心導体と外側導体との間は誘電体が詰めてある。中心軸に平行な磁束密度 \mathbf{B} の中で、このキャパシターを中心軸の周りで自転させると、中心導体と外側導体との間に電位差が生じた。この電位差から、誘電体に電場 \mathbf{E}_{ind} が誘導されたことが判る。

⁸ BIOGRAPHICAL MEMOIRS OF FELLOWS OF THE ROYAL SOCIETY、<https://royalsocietypublishing.org/>

⁹ H.A.Wilson : On the electric effect of rotating a dielectric in a magnetic field. *Phyl.Trans.A*, **204**, 121-137 (1904)

です。(4.4)も重要な実験式です。(4.4)は誘導電場 \mathbf{E}_{ind} と静磁場 \mathbf{B} の関係を表す新たな実験式です。この ϵ は誘電体の誘電率です。

ウィルソンの実験式(4.4)は、 $\epsilon \gg \epsilon_0$ では、ヘルツの予言

$$\mathbf{E}_{ind} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.1)$$

と区別がつかない。

アイヒェンヴァルトの実験もウィルソンの実験もヘルツの予言「運動する物体が導体かどうかに関わらず」を否定したが、ヘルツの予言は $\epsilon \gg \epsilon_0$ では実験結果と一致する。ヘルツの予言は当たらずとも遠からじです。この意味でも座標変換に目をつけたことはヘルツの慧眼です。

ヘルツの慧眼は座標変換の物理の始まりでした。数学としての座標変換には様々な座標変換がある。数ある座標変換の中で「電磁気現象を記述するのに適した座標変換はどの座標変換か」との問題提起です。

4.4.4 ローレンツ変換

ヘルツが他界した1894年以降にも、座標変換に着目して研究する人達が続いた。マイケルソン・モーリーの実験(1887年)の結果を座標変換の問題として理解することを目指したH.A.ローレンツ(H.A.Lorentz、1853-1928年)は、1895年論文で、「運動する物体は運動する方向に収縮する」(ローレンツ収縮)という仮説を提案した。ジョージ・フィッツジェラルドも同じ解釈に到達していたので、この長さの収縮をフィッツジェラルド・ローレンツ収縮と呼ぶこともある。

余談ですが、ローレンツの博士論文(1875年)はマクスウェルの電磁気学を使って光の反射・屈折を議論したものです。ライデン大学でローレンツを指導したのは熱音響現象のレイケ管で馴染みのP.L.レイケ(P.L.Rijke、1812-99年)です。

更に、ローレンツはある基準座標系から別の基準座標系への変換を新たな時間変数である局所時間を導入することで単純化できることに気付いた(1895年と1899年)。この局所時間是对応する基準座標系に依存する。局所時間を導入することでエーテルが不要になった。

ローレンツは1899年論文と1904年論文 "Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light" (光速未満の速度で

運動する系における電磁現象)で座標変換に時間の遅れ(あるいは寿命の延び)を導入した。ローレンツの1904年論文では、光速に近い速度で移動する物体の慣性質量の増加についても詳細に論じている。

ポアンカレ(Poincaré、1854-1912年)はローレンツ収縮と時間の遅れ(あるいは寿命の延び)とを含む座標変換をローレンツ変換と名付けた(1905年)。ローレンツ変換については第5章 時間・空間の座標変換で再度議論する。

4.5 電磁場の座標変換

ここでは、アイヒェンヴァルトの実験(1903年)とウィルソンの実験(1904年)に基づいて、電磁場の座標変換の思考実験を行う。この思考実験は今井 功著『電磁気学を考える』(サイエンス社、1990)を参考にした。逆変換でもとに戻る条件を捜す際に、マイケルソン・モーリーの実験(1887年)の結果を使うと、その結果はローレンツ収縮を含むローレンツ変換と一致する。

この思考実験では、二つの座標系を想定し、S系とS'系と呼ことにする。S'系はS系のx座標軸の負方向に一定の速さvで移動している。同じことだが、S系はS'系のx'座標軸の正方向に一定の速さvで移動している。y座標とz座標とは共通です。

4.5.1 電石の座標変換

S系に静止しているz軸方向に長い棹羊羹状の電石を想定する。電石はxz平面に平行で、電石の単位面積あたりの分極電荷密度を σ_p とする(図4.3)。電気分極密度 $\mathbf{P} = \sigma_p$ と電束密度 \mathbf{D} との関係は

$$\mathbf{P} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \mathbf{D}$$

です。このy成分

$$P_y = \sigma_p = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) D_y$$

のみ有限です。簡単のために、誘電率は $\epsilon \gg \epsilon_0$ とする:

$$D_y \simeq P_y = \sigma_p \quad \text{かつ} \quad \mathbf{B} = 0$$

S'系では、この電石がx軸の正方向に一定の速さvで移動している。

S'系では、電束密度 \mathbf{D}' だけでなく、磁場 \mathbf{H}' も有限です:

$$D'_y \simeq \sigma'_p \quad \text{かつ} \quad H'_z = J'_x = D'_y v \quad (4.5)$$

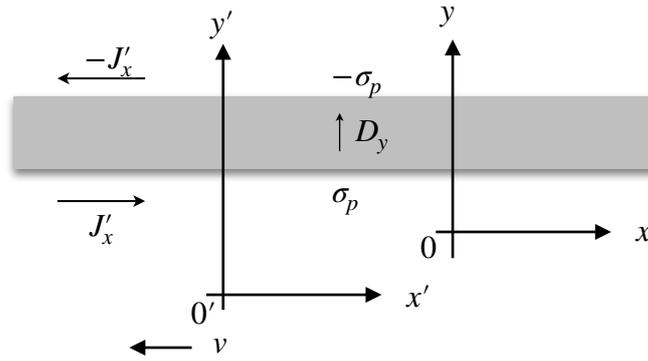


図4.3 S系に静止しているz軸方向に長い棹羊羹状の電石：観測されるのは分極電荷密度 σ_p と分極電荷密度 P_y と電束密度 $D_y = P_y = \sigma_p$

このことを示そう。S'系では、分極電荷密度 σ'_p による電束密度 $D'_y \simeq \sigma'_p$ だけでなく、速さ v でx'軸の正方向に移動する分極電荷密度 σ'_p は、「電流は電荷の移動」とする立場では、電石表面の単位長さあたりの面電流 $J'_x = \sigma'_p v = D'_y v$ となる。この面電流 J'_x は、アンペールの法則による一様な磁場 $H'_z = J'_x = D'_y v$ を伴う。

この磁場 H'_z に対応する磁束密度は

$$B'_z = \mu' \gamma D_y v$$

です。

無次元量

$$\gamma \equiv \frac{D'_y}{D_y} = \frac{\sigma'_p}{\sigma_p} > 0 \quad (4.6)$$

を導入して、(4.5)を書き換えると

$$D'_y = \gamma D_y \quad \text{かつ} \quad B'_z = \mu' \gamma D_y v \quad (4.7)$$

です。つまり、S系での電束密度 \mathbf{D} はS'系では電束密度 $D'_y = \gamma D_y$ と磁場 $H'_z = \gamma D_y v$ とに変換されている。

この磁場 \mathbf{H}' は、 $\gamma \simeq 1$ では、レントゲンの実験（1888年）やアイヒェンヴァルトの実験（1903年）による実験式

$$\mathbf{H}_{ind} = \mathbf{v} \times \mathbf{P} \quad (4.3)$$

の $\epsilon \gg \epsilon_0$ の場合に対応している。

(4.7)の行列表現は

$$\begin{bmatrix} D'_y \\ B'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ \gamma \mu' v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_y \\ 0 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mu' v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

です。

4.5.2 磁石の座標変換

S系に静止しているz軸方向に長い棹羊羹状の棒磁石（あるいは電流の流れているソレノイドコイル）を想定する（図4.4）。この磁石に流れている磁化電流はz方向の単位長さあたり J_m とする。電束密度は無い：

$$B_z = \mu J_m \quad \text{かつ} \quad \mathbf{D} = 0$$

S'系では、この電石はx軸の正方向に一定の速さ v で移動している。

S'系では、磁束密度 \mathbf{B} だけではなく、電場 \mathbf{E}' も有限です：

$$B'_z = \mu' J'_m \quad \text{かつ} \quad E'_y = \left(1 - \frac{\epsilon'_0}{\epsilon}\right) v B'_z \quad (4.9)$$

です。この第二式は、誘導電場 \mathbf{E}_{ind} のウィルソンの実験式

$$\mathbf{E}_{ind} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.4)$$

に対応する。ウィルソンの実験式(4.4)ではS'系を表現するプライム'が抜けている。

ここで、無次元量

$$\delta \equiv \frac{B'_z}{B_z} = \frac{\mu' J'_m}{\mu J_m} > 0 \quad (4.10)$$

を導入すると、(4.9)は

$$B'_z = \delta B_z \quad \text{かつ} \quad E'_y \simeq \left(1 - \frac{\epsilon'_0}{\epsilon}\right) v \delta B_z \quad (4.11)$$

です。この第二式は、 $\delta \simeq 1$ の場合には、ウィルソンの実験結果そのものです。

簡単のために、磁石の誘電率についても $\epsilon' \gg \epsilon'_0$ とすると、

$$B'_z = \delta B_z \quad \text{かつ} \quad E'_y = \delta v B_z \quad (4.12)$$

です。つまり、S系での電束密度 \mathbf{B} は、S'系では、 $B'_z = \delta B_z$ の磁束密度 \mathbf{B}' と $E'_y = \delta v B_z$ の電場 \mathbf{E}' とに変換されている。

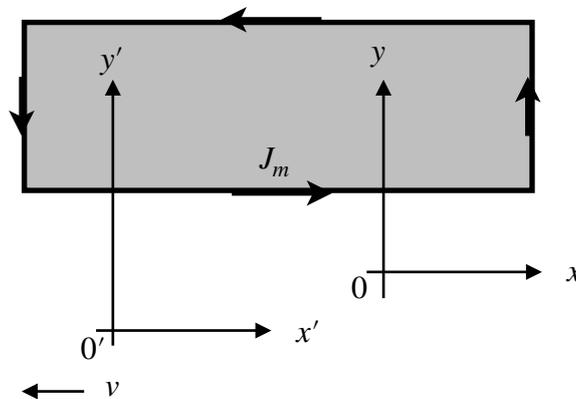


図4.4 S系に静止したz軸方向に長い棹羊羹状棒磁石：一様な電流密度 J_m と紙面に垂直な磁束密度 $B_z = \mu_0 J_m$ が観測される。

電場 \mathbf{E}' を電束密度 \mathbf{D}' で表現すると、

$$D'_y = \delta \epsilon' v B_z$$

です。このことを考慮すると(4.12)の行列表現は

$$\begin{bmatrix} D'_y \\ B'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \delta \epsilon' v \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ B_z \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} 0 & \epsilon' v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ B_z \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

です。

4.5.3 電石と磁石の重ね合わせの座標変換

ここでは電石と磁石との重ね合わせを想定する。電石と磁石の誘電率は、簡単のために、ここでも $\epsilon \gg \epsilon_0$ とする。 $\epsilon \gg \epsilon_0$ は既に3.1.1 電束密度と電荷の関係で述べたように、金属などの良導体の特徴です。

まず、電石と磁石の重ね合わせがS系に静止しているとする。S系からS'系への変換

$$(D_y, B_z) \Rightarrow (D'_y, B'_z)$$

は、(4.8)と(4.13)とを併せて、

$$\begin{bmatrix} D'_y \\ B'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \delta \epsilon' v \\ \gamma \mu' v & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ B_z \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 0 & \frac{\delta \epsilon' v}{\gamma} \\ 0 & \frac{\delta}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ B_z \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

です。

次に、この電石と磁石の重ね合わせがS'系に静止しているとする。S'系からS系への変換

$$(D'_y, B'_z) \Rightarrow (D_y, B_z)$$

は、 v の符号を反転して、

$$\begin{bmatrix} D_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\delta \epsilon' v \\ -\gamma \mu' v & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_y \\ B'_z \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\delta \epsilon' v}{\gamma} \\ -\mu' v & \frac{\delta}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_y \\ B'_z \end{bmatrix}$$

です。変換 $(D'_y, B'_z) \Rightarrow (D_y, B_z)$ は逆変換です。

S系からS'系へ変換してからS系へ逆変換すると、完全にもとに戻る：

$$\gamma^2 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\delta \epsilon' v}{\gamma} \\ -\mu' v & \frac{\delta}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\delta \epsilon' v}{\gamma} \\ \mu v & \frac{\delta}{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

つまり

$$\gamma^2 \begin{bmatrix} 1 - \frac{\delta}{\gamma} \epsilon \mu' v^2 & \frac{\delta}{\gamma} (\epsilon' - \frac{\delta}{\gamma} \epsilon) v \\ (\frac{\delta}{\gamma} \mu' - \mu) v & \frac{\delta}{\gamma} (\frac{\delta}{\gamma} - \epsilon' \mu' v^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

が必要です。

この必要条件(4.15)の意味を調べよう。先ず、左辺の対角成分が有限にもかかわらず、非対角成分が0になるには

$$\epsilon' = \frac{\delta}{\gamma} \epsilon \quad \text{かつ} \quad \mu' = \frac{\delta}{\gamma} \mu$$

従って

$$\epsilon' \mu' = \frac{\delta^2}{\gamma^2} \epsilon \mu$$

が必要です。マイケルソン・モーリーの実験結果 (光速 $c \equiv 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ は座標系に依らない)

$$\epsilon' \mu' = \epsilon \mu = \frac{1}{c^2}$$

を使うと

$$\delta^2 = \gamma^2$$

となる。さらに、 $\gamma > 0$ かつ $\delta > 0$ を思い出すと

$$\delta = \gamma > 0 \tag{4.16}$$

です。

次に、(4.15)の対角成分からは、(4.16)を使うと、

$$\gamma^2 (1 - \epsilon \mu' v^2) = 1 \quad \text{かつ} \quad \gamma^2 (1 - \epsilon' \mu v^2) = 1$$

つまり

$$\epsilon = \epsilon'$$

となる。従って、積 $\epsilon\mu$ だけでなく、誘電率 ϵ も透磁率 μ も座標系に依らない：

$$\epsilon' = \epsilon \quad \text{かつ} \quad \mu' = \mu \tag{4.17}$$

(4.17)を使うと

$$1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 \tag{4.18}$$

です。(4.18)によれば、

$$|v/c| \leq 1$$

です。すなわち、等速運動している座標系同士の相対速度の大きさ v は光速 c を越えることが無い。また、(4.18)によれば

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - (v/c)^2}} \geq 1 \tag{4.19}$$

です。

思考実験から得られた結果(4.16)、(4.17)、(4.19)はローレンツ収縮と矛盾しない。特に、(4.19)を γ の定義式

$$\gamma \equiv \frac{D'_y}{D_y} = \frac{\sigma'_p}{\sigma_p} > 0 \quad (4.6)$$

と比較すると、S系からS'系への座標変換では分極電荷密度 σ_p と電束密度 D_y とが $\gamma \geq 1$ 倍になる。また、(4.19)を δ の定義式

$$\delta \equiv \frac{B'_z}{B_z} = \frac{\mu' J'_m}{\mu J_m} > 0 \quad (4.10)$$

と比較すると、S系からS'系への座標変換では磁束密度 B_z と磁化電流密度 J_m とが $\gamma \geq 1$ 倍になる。このことはx方向（運動方向）の長さが $1/\gamma \leq 1$ になるローレンツ収縮と同じです。分極電荷も座標系に依らない。

γ は後にローレンツ因子と呼ばれるようになった。

$\delta = \gamma$ に注意すると、S系からS'系への変換(4.14)は、

$$\begin{bmatrix} D'_y \\ B'_z \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & \epsilon v \\ \mu v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_y \\ B_z \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

です。この逆変換は

$$\begin{bmatrix} D_y \\ B_z \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -\epsilon v \\ -\mu v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_y \\ B'_z \end{bmatrix}$$

です。いずれも、

$$\epsilon \gg \epsilon_0$$

の場合の電磁場の座標変換です。

$\epsilon \gg \epsilon_0$ の場合のS系からS'系への座標変換(4.20)によれば、

$$D'_y = \gamma (D_y - \epsilon v B_z) \quad \text{かつ} \quad B'_z = \gamma (-v D_y + B_z)$$

です。 $-v = v_x$ に注意すると、ベクトル表現では

$$\mathbf{D}' = \gamma (\mathbf{D} + \epsilon \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{かつ} \quad \mathbf{B}' = \gamma (\mathbf{B} + \mu \mathbf{v} \times \mathbf{D}) \quad (4.21)$$

です。

(4.21)の第一式

$$\mathbf{D}' = \gamma (\mathbf{D} + \epsilon \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

によれば、S'系では、 $\mathbf{D} = 0$ の場合でも座標変換による電場

$$\mathbf{E}' = \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.22)$$

が出現する。また、(4.21)の第二式

$$\mathbf{B}' = \gamma (\mathbf{B} + \mu \mathbf{v} \times \mathbf{D})$$

によれば、S'系では、 $\mathbf{B} = 0$ の場合でも座標変換による磁場

$$\mathbf{H}' = \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{D} \quad (4.23)$$

が出現する。いずれも $\epsilon \gg \epsilon_0$ の場合です。

(4.22)と(4.23)とは、座標変換により、磁場と電場は相互に変換されることの一例です。

$\gamma \simeq 1$ の場合には、(4.22)と(4.23)は、それぞれ、ヘルツ理論の結果

$$\mathbf{E}_{ind} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.1)$$

と

$$\mathbf{H}_{ind} = \mathbf{v} \times \mathbf{D} \quad (4.2)$$

とに対応する。 $\gamma \simeq 1$ はヘルツが使ったガリレイ変換に対応する。(4.2)はウィルソンの実験の $\epsilon_0 \ll \epsilon$ に対応する。

最後に、ローレンツ因子 γ あるいはローレンツ収縮 $1/\gamma$ の v/c 依存性を調べよう。

(4.19)によれば、 v/c と $0 < 1/\gamma \leq 1$ との関係は

$$\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 \quad (4.24)$$

です。この関係は図4.5の半円です。

(4.24)を使って、二つの極限を調べよう。

$|v/c| \ll 1$ では、 $\gamma \simeq 1$ です。この極限は後の古典的極限です。 $|v/c|$ について最低次の近似で

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \simeq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \leq 1$$

すなわち

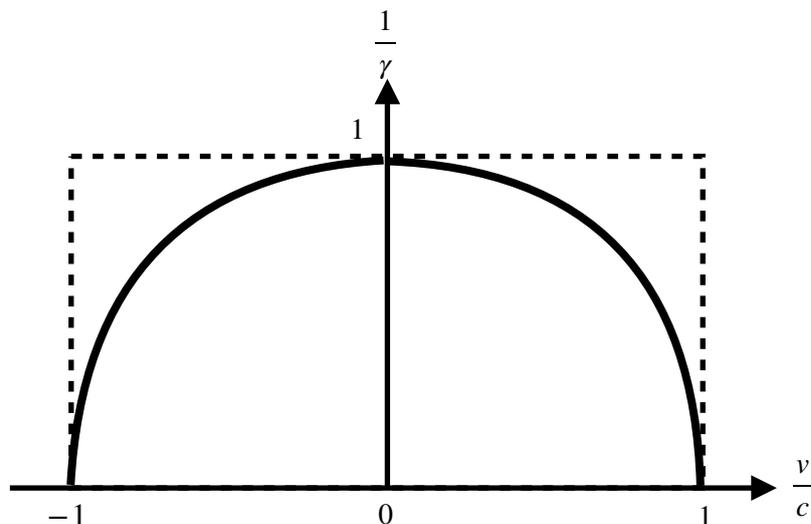


図4.5 ローレンツ因子 γ あるいはローレンツ収縮 $1/\gamma$ の v/c 依存性：古典的極限 $|v/c| \ll 1$ では $1/\gamma \simeq 1$ です。後の相対論的極限 $|v/c| \simeq 1$ では $1/\gamma \ll 1$ です。

$$\gamma \simeq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2$$

に注意すると、

$$\gamma - 1 \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \geq 0 \quad (4.25)$$

です。

逆に $\gamma \rightarrow \infty$ では、 $|v/c| \simeq 1$ です。この極限は後の相対論的極限です。 $1/\gamma$ について最低次の近似で

$$\left| \frac{v}{c} \right| = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\gamma} \right)^2} \simeq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} \right)^2 \leq 1$$

です。

4.5.4 単極誘導と単極モーター

単極誘導や単極発電機では、S系に固定された磁石の磁束密度 \mathbf{B} を S'系に固定された円盤状金属で観測すると、径方向の誘導電場

$$\mathbf{E}' = \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.22)$$

が観測される。これが単極誘導や単極発電機での誘導起電力です。通常の実験では、 $|v/c| \ll 1$ なので、古典的極限 $\gamma \rightarrow 1$ が良い近似です。

単極誘導と単極発電機の起電力を理解するには座標変換だけで充分ですが、単極モーターを理解するにはエントロピー生成最小の法則も不可欠です。

単極モーターが回転すると、S'系では、金属円盤に径方向の電場 $\mathbf{E}' = \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ が発生する。ここで、単極モーターの回転方向は任意です。単極モーターの回転方向は円盤状金属に流れる径方向電流によるジュール発熱を少なくするように選ばれる。つまり、単極モーターの動作原理には、座標変換の視点だけでなく、エントロピー生成最小の法則も必要です。

単極モーターだけでなく、電動モーターの回転方向もジュール発熱が小さくなるように選ばれる。リニアモーターの運動方向もジュール発熱が小さくなるように選ばれる。いずれも後のエントロピー生成最小の法則の例です。

誘導電場 $\mathbf{E}' = \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ に対応する電束密度 \mathbf{D}' を S系で観測すると、磁石の磁場が

$$\gamma \mathbf{v} \times \mathbf{D}' \quad (4.23)$$

だけ減少する。すなわち、回転速度が大きくなると S系で観測した磁場 \mathbf{H} が小さくなる。

$$\mathbf{D}' \propto \mathbf{E}' \propto \gamma \mathbf{v}$$

に注意すると、S系で観測した磁場 \mathbf{H} の減少(4.23)は $(\gamma v)^2$ に比例する。

4.5.5 ローレンツ力：磁束密度の座標変換

磁束密度 \mathbf{B} の空間を速度 \mathbf{v} で運動する物体には、 $\mathbf{D} = 0$ の場合でも、電場

$$\mathbf{E}' = \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.22)$$

が作用する。運動する物体が電荷 q の荷電粒子の場合には、ローレンツ力

$$q\mathbf{E}' = \gamma q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

が働く。これは、狭義のローレンツ力と呼ばれている。狭義のローレンツ力は、古典的極限 $\gamma \rightarrow 1$ では、ヘヴィサイド（1889年）によるアンペール力の新表現 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ に一致する。

(4.21)の第一式

$$\mathbf{D}' = \gamma (\mathbf{D} + \epsilon \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

によれば、速度 \mathbf{v} で運動する物体には、一般には、電場

$$\mathbf{E}' = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

が作用する。運動する物体が電荷 q の荷電粒子の場合には、クーロン力

$$q\mathbf{E}' = \gamma (q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

が働く。従って、一般のローレンツ力は

$$\mathbf{F}'_{Lorentz} \equiv q\mathbf{E}' = \gamma (q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

です。

一般のローレンツ力は、古典的極限 $\gamma \rightarrow 1$ では

$$\mathbf{F}'_{Lorentz} \simeq q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

となる。 $q\mathbf{E}$ は静電場 \mathbf{E} によるクーロン力で、 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ はガリレイ変換により出現した電場 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ によるクーロン力です。

ローレンツ力は、積層された原子核乾板による宇宙線の軌道観測で認識され、サイクロトロンや質量分析器にも使われている。

軌道放射光は高速の電子の軌道が曲がるときに出る放射光を利用する。高速の電子の軌道を曲げるのはローレンツ力です。電子を加速して高速にするのは加速器の仕事です。兵庫県播磨科学公園都市にあるSPring-8では、 $1 - v/c \simeq 2 \times 10^{-9}$ すなわち $\gamma = 15,656$ という光速に近い相対論的高速電子を使う。

ローレンツ力という言葉は高等学校の物理でも出てくるが、残念なことに、古典的極限に限定されているだけでなく、座標変換という視点が隠されている。

4.5.6 電流の磁気作用：電束密度の座標変換

速度 \mathbf{v} で運動する電荷には、 $\mathbf{B} = 0$ の場合でも、磁場

$$\mathbf{H}' = \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{D} \quad (4.23)$$

が出現する。帯電した長い棒状物体を想定し、単位長さあたりの電荷密度を q とする。棒に固定された座標系（S系）で観測すると、棒の長さに比べると充分近いが棒の太さに比べて充分遠い場所では、この棒状電荷に伴う電束密度 \mathbf{D} は、放射状であり、 \mathbf{D} は径方向成分

$$D_r = \frac{q}{2\pi r}$$

だけです（図5.6）。

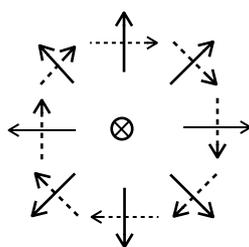


図5.6 帯電した棒の電場：帯電した棒の周囲には実線矢印のような放射状の電束密度 D_r がある。棒が紙面に垂直に運動すると破線矢印のような磁場 \mathbf{H} が生じる。

この棒が長手方向に速度 \mathbf{v} で動いて見える座標系 S' で観測すると、磁場

$$\mathbf{H}' = \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{D}$$

が出現する。電流密度 $\gamma q \mathbf{v}$ を考慮すると、この磁場は電流による磁気作用であり、アンペールの右ネジの法則そのものです。つまり、「電流は電荷の移動」という視点では、エルステッド以来の電流の磁気作用やアンペールによる右ネジの法則は座標変換の結果です。

4.5.7 光速不変と電荷不変

初めに、光速が座標変換に対して不変であることを使ってローレンツ収縮と時計の遅れ（あるいは寿命の伸び）とを議論する。

x 軸に平行に置かれた棒を想定し、この棒の長さはS系では ℓ だが、S'系では ℓ' とする。光が棒の端から端まで通過する時間は、S系では $\tau \equiv \ell/c$ だが、S'系では $\tau' \equiv \ell'/c'$ です。光速は座標変換に対して不変 $c' = c$ なので

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{\ell'}{\ell}$$

です。ローレンツ力の議論では、 $B'_z = \gamma B_z$ を使ったが、磁束密度の z 成分 B_z が大きくなることは、棒の運動方向 (x 方向) の長さが $1/\gamma$ に収縮したことの表れなので

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{\ell'}{\ell} = \frac{1}{\gamma} \leq 1$$

です。

座標変換により、 x 方向の長さが $1/\gamma$ に収縮することは、ローレンツ収縮と呼ばれている。座標変換により、時間間隔が $1/\gamma$ に収縮することは、S'系での時計はゆっくり動くことを意味するので、時計の遅れとか寿命の延びと呼ばれている。

次に、光速不変の代わりに、電荷が座標変換に対して不変と仮定すると、ローレンツ収縮と時計の遅れあるいは寿命の延びが導かれることを示そう。

x 軸に平行に置かれた帯電した棒を想定する。この棒をS系で観測すると、単位長さあたりの電荷密度 σ で長さ ℓ の棒である。この棒をS'系で観察すると、単位長さあたりの電荷密度 σ' で長さ ℓ' の棒である。電荷は座標変換に対して不変

$$\sigma \ell = \sigma' \ell'$$

と仮定したので

$$\frac{\ell'}{\ell} = \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{1}{\gamma} \leq 1$$

です。つまり、S'系では、電石の x 方向の長さが $1/\gamma \leq 1$ に短くなり、電荷密度が $\gamma \geq 1$ 倍に大きくなる。

x 軸に平行な電流密度があり、この電流密度を、S系で観測すると J 、S'系で観測する J' とする。S系で時間間隔 τ の間に通過する電荷量は $J\tau$ であり、S'系で時間間隔 τ' の間に通過する電荷量は $J'\tau'$ である。電荷量が座標変換に対して不変

$$J\tau = J'\tau'$$

と仮定したので

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{J}{J'} = \frac{1}{\gamma} \leq 1$$

である。つまり、S'系では、電流密度が $\gamma \geq 1$ 倍に大きくなり、時間間隔が $1/\gamma \leq 1$ 短くなる。

逆に、ローレンツ収縮と時計の遅れ（あるいは寿命の延び）を仮定すると、電荷が座標変換に対して不変になる。

4.5.8 アンペール力：クーロン力の座標変換

電流の流れている電線間には電線間距離に反比例した力が働く。この力がアンペール力です。アンペール力の符号は電流の向きに依存する；電流の向きが同じなら引力、逆向きなら斥力です。

電流に纏わり付く磁場を介して電線間に働く力と解釈され続けてきたアンペール力には、仲介者としての磁場は不要で、ローレンツ収縮を考慮した電荷密度間に働くクーロン力です。このことを示すには「電流は電荷の移動」とのイメージとローレンツ収縮とを使おう。

電流の流れていない電線にはクーロン力が働かない。電流の流れていない電線には、単位長さあたり、 q_+ の正電荷と q_- の負電荷が存在し、両者が釣り合っているので中性です： $q_+ + q_- = 0$ 。

正電荷の担体（=陽イオン）は電線に固定されているが、負電荷の担体（=伝導電子）は電線に沿って自由に動くことが出来る。電流が流れている電線では、電線に固定されている正電荷の担体に対して負電荷の担体が移動する。2本の電線（電線Aと電線B）が平行な場合を想定し、負電荷の担体の正電荷に対する移動速度を \mathbf{v} とすると、「電流は電荷の移動」とのイメージとローレンツ収縮とにより、電線に流れている電流は

$$\mathbf{J} = -\gamma q_- \mathbf{v} = \gamma q_+ \mathbf{v}$$

です。ここで $\gamma \geq 1$ はローレンツ収縮 $1/\gamma \leq 1$ のあらわれです。

まず、異符号電荷間に働くクーロン引力を調べる。電線Aの正電荷密度 q_+ と電線Bの負電荷密度 γq_- との間に働くクーロン引力は

$$\gamma q_- q_+ = -\gamma q_+^2 < 0$$

に比例する。電線Bの正電荷密度 q_+ と電線Aの負電荷密度 γq_- との間に働くクーロン力も

$$\gamma q_- q_+ = -\gamma q_+^2 < 0$$

に比例する引力です。

従って、異符号電荷間のクーロン引力は、両者の和

$$2\gamma q_- q_+ = -2\gamma q_+^2 < 0$$

に比例する。

次に同符号電荷間に働くクーロン斥力を調べる。電線Aの正電荷密度 q_+ と電線Bの正電荷密度 q_+ との間に働くクーロン斥力は、両者の電荷密度の相対速度がゼロなので、

$$q_+ q_+ = q_+^2 > 0$$

に比例する。

電線Aの負電荷密度 q_- と電線Bの負電荷密度 q_- との間に働くクーロン斥力は互いの相対速度に依存する。電流の向きが同じ場合には、相対速度が零なので、負電荷間のクーロン斥力は

$$q_- q_- = q_-^2 = q_+^2 > 0$$

に比例する。電流が逆向きの場合には、負電荷間のクーロン斥力は

$$\gamma_2 q_- q_- = \gamma_2 q_-^2 = \gamma_2 q_+^2 > 0$$

に比例する。ここで、相対速度 $2v$ に対応して、

$$\frac{1}{\gamma_2} \equiv \sqrt{1 - \left(\frac{2v}{c}\right)^2}$$

です。

従って、同符号電荷間に働くクーロン斥力は、電流の向きが同じ場合には

$$q_+^2 + q_-^2 > 0$$

ですが、電流の向きが逆の場合には

$$q_+^2 + \gamma_2 q_-^2 = (1 + \gamma_2) q_+^2 > 0$$

です。

2本の電線を通る電流が同じ向きの場合には、電線間のクーロン力は

$$2\gamma q_- q_+ + q_+^2 + q_-^2 = -2(\gamma - 1)q_+^2 \leq 0$$

に比例する引力です。古典的極限 $|v/c| \ll 1$ では、

$$\gamma - 1 \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \tag{4.25}$$

なので、電線間のクーロン力は

$$-\left(\frac{v}{c}\right)^2 q_+^2 \leq 0$$

に比例する引力です。

2本の電線を通る電流が逆向きの場合には、電線間のクーロン力は

$$2\gamma q_- q_+ + q_+^2 + \gamma_2 q_-^2 = [-2\gamma + 1 + \gamma_2] q_+^2 = [-2(\gamma - 1) + \gamma_2 - 1] q_+^2$$

に比例する。古典的極限 $|v/c| \ll 1$ では、(4.25)と

$$\gamma_2 - 1 \simeq 2 \left(\frac{v}{c} \right)^2$$

とに注意すると、

$$-2(\gamma - 1) + \gamma_2 - 1 \simeq \left(\frac{v}{c} \right)^2 \geq 0$$

となるので、電線間のクーロン力は

$$\left(\frac{v}{c} \right)^2 q_+^2 \geq 0$$

に比例する斥力となる。

このように、電流に纏わり付く磁場を使わずに、「電流は電荷の流れ」とのイメージとローレンツ収縮とを使うことでアンペール力が説明できる。同じことですが、ローレンツ収縮を考慮した電荷密度間に働くポテンシャル力（クーロン力）の古典的極限がアンペール力です。

アンペール力は電荷密度間に働くポテンシャル力という意味で、「電流は電荷の流れ」とニュートン力学とは矛盾しない。

4.6 まとめ

この章では、アイヒェンヴァルトの実験とウィルソンの実験に基づいて、電磁気現象の座標変換を議論した。「電流は電荷の運動」とのイメージを使うと、電磁気現象の座標変換では次のことが判明した。

1. 誘電率 ϵ と透磁率 μ は座標系に依らない。マイケルソン・モーリーの実験結果（光速 $c \equiv 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ は座標系に依らない）の表れです。また、電荷も座標系に依らない。
2. 電流の磁気作用と磁場中で運動する荷電粒子に働くローレンツ力とは、いずれも、座標変換の表れです。
3. 電荷量も座標系に依らない。電荷密度、電束密度、電流密度、磁束密度が $\gamma \geq 1$ になることは「ローレンツ収縮」と呼ばれ、時刻の刻みが $1/\gamma \leq 1$ になることは「時計の遅れ」とか「寿命の延び」と呼ばれている。

4. 電流の流れている電線間に働くアンペール力は「ローレンツ収縮」を考慮したクーロン力です。クーロン力はポテンシャル力なので、アンペール力もポテンシャル力です。

熱電気現象を熱力学の問題として排除しても、ポインティングにより完成されたとされるマクスウェルの電磁気学には、未解決の二つの問題（単極誘導とアンペール力と）が残されていた（3.5 マクスウェルの電磁気学の問題点）。いずれも座標変換という新たな視点を導入することで、問題が解消し、力学としての電磁気学が漸く完成した。特に、アンペール力は、ニュートン力学では電荷と電流を独立の基本概念とせざるを得なかったが、ローレンツ収縮を考慮したクーロン力を使うことで、「電流は電荷の移動」も再確認された。

電磁気現象を記述するのに適した座標変換は光速や電荷量が不変となるローレンツ変換です。

5. 時間・空間の座標変換

時間・空間の座標変換として、線形変換を議論する。

二つの座標系S系とS'系を想定する。S系での時刻 t と位置 x とをS'系で観測すると時刻 t' と位置 x' とになる。

・S'系は x 座標の負方向に一定の速さ v で動いているとする。一般の線型変換は

$$x' = \kappa(x + vt) \quad (5.1)$$

となり、この逆変換は

$$x = \kappa(x' - vt')$$

です。ここで位置や時刻に依らない無次元定数 $\kappa > 0$ は速さ v の関数です。

両者から、 x' を消去することで、一般の線型変換は

$$t' = \kappa \left[\left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right) \frac{x}{v} + t \right]$$

となり、 x を消去することで、逆変換は

$$t = \kappa \left[-\left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right) \frac{x'}{v} + t' \right]$$

となる。

行列表現では、一般の線形変換は

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} 1 & v \\ \left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right) \frac{1}{v} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

であり、逆変換は

$$\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} 1 & -v \\ -\left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right) \frac{1}{v} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix}$$

です。

5.1 ガリレイ変換：線形変換の一つ

ニュートン力学で馴染みのガリレイ変換では、S系からS'系への変換とその逆変換は、それぞれ、

$$x' = x + vt$$

$$x = x' - vt'$$

であり、時間座標は座標変換に対して不変です：

$$t = t'$$

ガリレイ変換では $\kappa = 1$ です。

5.2 ローレンツ変換

5.2.1 光速不変な線形変換

マイケルソン・モーリーの実験（1887年）の結果を説明するために、ローレンツ（H.A.Lorentz、1853-1928年）は1893年に、フィッツジェラルド（G.Fitzgerald、1851-1901年）は1895年に、それぞれ独立に「速さ v で等速運動している物体は運動方向に収縮し、 $1/\kappa \leq 1$ 倍になる」との仮説を提出した。ローレンツ収縮（Lorentz contraction）あるいはフィッツジェラルド・ローレンツ収縮と呼ばれている。この仮説によれば、S系で x 方向の長さ ℓ の棒をS'系で観測すると $\ell' = \ell/\kappa$ に見える。

マイケルソン・モーリーの実験によれば光速 c は座標系に依らない。S系で光が距離 ℓ だけ進むのに要する時間は $\Delta t \equiv \ell/c$ です。S'系で光が距離 $\ell' = \ell/\kappa$ だけ進むのに要する時間は $\Delta t' \equiv \ell'/c = \Delta t/\kappa$ です。S'系で観測すると時計の刻みはS系の $1/\kappa$ 倍に短くなる。このことは時計の遅れとか寿命の延びと呼ばれる。S'系での寿命はS系での寿命の κ 倍になるからです。

ローレンツ収縮と寿命の延びとを含む座標変換をローレンツ変換と命名した（1905年）のはポアンカレ（Poincaré、1854-1912年）でした。

ローレンツ変換の場合の無次元定数 κ を議論しよう。位置や時刻に依らない無次元定数 κ は速さ v の関数なので、次元解析によれば、 $\kappa > 0$ は無次元量 v/c の偶関数、例えば $(v/c)^2$ の関数です。

電磁力線網の前縁の運動を考えよう。この前縁は時刻 $t = 0$ に $x = 0$ にあり、 x 軸の正方向に進むとすると、任意の時刻 t における前縁の位置は

$$x = ct$$

です。ここで c はS系での光速です。この前縁をS'系で観測すると

$$x' = c't'$$

です。S'系での原点の位置は任意に選べるので、時刻 $t' = 0$ に位置 $x' = 0$ にあるとした。ここで c' はS'系での光速です。

ローレンツ変換では光速が座標に依らない（ $c' = c$ ）ので、

$$x = ct \quad \text{かつ} \quad x' = c't' \tag{5.3}$$

です。

(5.3)を使うと、(5.1)と(5.2)とは、それぞれ、

$$t' = \kappa \left(1 + \frac{v}{c}\right) t \quad \text{と} \quad t = \kappa \left(1 - \frac{v}{c}\right) t' \quad (5.4)$$

となり、両者から

$$\kappa^2 [1 - (v/c)^2] = 1$$

すなわち

$$\kappa^2 = \frac{1}{1 - (v/c)^2} \geq 1$$

となる。逆に、これが満足されている線型座標変換では光速不変です。 κ は確かに $(v/c)^2$ の関数です。

これを使うと(5.2)の行列の中の $1 - 1/\kappa^2$ は $(v/c)^2$ に等しい：

$$1 - \frac{1}{\kappa^2} = \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

光速 c が有限でも v/c が小さいならガリレイ変換に近づくことを考慮すると

$$\kappa = \sqrt{\frac{1}{1 - (v/c)^2}} \geq 1$$

です。これをローレンツ因子

$$\delta = \gamma \equiv \sqrt{\frac{1}{1 - (v/c)^2}} \geq 1 \quad (4.19)$$

と比較すると

$$\kappa = \gamma \quad (5.5)$$

です。

(5.3)と(5.4)と(5.5)から、ローレンツ変換の行列表示は

$$\begin{bmatrix} x' \\ ct' \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

となり、逆ローレンツ変換の行列表示は

$$\begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ ct' \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

です。

ローレンツ変換には幾何学的特徴がある。(5.6)あるいは(5.7)のどちらからでも

$$x^2 - (ct)^2 = (x')^2 - (ct')^2$$

となる。つまり、虚数単位を i とすると x 軸と ict 軸とからなる時空の原点からの距離の2乗はローレンツ変換に対して不変です。直角3角形を想定し、直角を挟む2辺の長

さを形式的に x と ict とする。そうすると、ピタゴラスの定理により、斜辺の長さの2乗は $x^2 - (ct)^2$ となるからです。

ここでは1次元空間を考えてきたが3次元空間でも同様な議論ができる。3次元空間の3本の座標軸に ict 軸を加えた仮想的4次元時空の原点からの距離の2乗はローレンツ変換に対して不変です。

5.2.2 ローレンツ収縮と時間の遅れ

1次元空間に戻る。

ローレンツ変換では(5.6)から

$$x' = \gamma(x + vt) \quad \text{かつ} \quad ct' = \gamma \left(ct + \frac{v}{c}x \right) \quad (5.8)$$

となり、逆ローレンツ変換では(5.7)から

$$x = \gamma(x' - vt') \quad \text{かつ} \quad ct = \gamma \left(ct' - \frac{v}{c}x' \right) \quad (5.9)$$

となる。

(5.8)と(5.9)とから、ローレンツ収縮や時間の遅れが導出可能です。

そもそも、長さを測るとは「時間座標を固定して空間座標の差をとること」です。S'系での長さ $\ell' \equiv x'_2 - x'_1$ だけ離れた2点 x'_2, x'_1 を考える。このことはS'系で静止している長さ ℓ' の棒を考えていることと同じです。

(5.8)の第一式に依れば、2点 x'_2, x'_1 に対応するS系の2点は

$$x_2 = \frac{x'_2}{\gamma} - vt \quad \text{と} \quad x_1 = \frac{x'_1}{\gamma} - vt$$

なので、 ℓ' に対応するS系での長さ $\ell \equiv x_2 - x_1$ は

$$\ell \equiv x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}(x'_2 - x'_1) = \frac{\ell'}{\gamma}$$

です。つまり二つの系で長さが異なる。

ローレンツ因子

$$\delta = \gamma \equiv \sqrt{\frac{1}{1 - (v/c)^2}} \geq 1 \quad (4.19)$$

を考慮すると、棒が動いて見えるS系での長さ $\ell \equiv x_2 - x_1$ は、棒が静止しているS'系での長さ $\ell' \equiv x'_2 - x'_1$ の $1/\gamma \leq 1$ 倍です。このことをローレンツ収縮という。逆ローレンツ変換でも同じです。棒の長さは棒が静止している慣性系で最大です。この最大の長さは棒の固有長さと呼ばれている。

次に、時間間隔を測るとは「空間座標を固定して時間座標の差をとること」です。S'系で時間間隔 $\tau' \equiv t'_2 - t'_1$ だけずれた2つの時刻 t'_2 、 t'_1 を考える。 t'_2 、 t'_1 はS'系で静止している時計を使って測定した時刻である。(5.8)の第2式に依れば、2つの時刻 t'_2 、 t'_1 に対応するS系の時刻は

$$t_2 = \frac{1}{\gamma}t'_2 - \frac{v}{c} \cdot \frac{x}{c} \quad \text{と} \quad t_1 = \frac{1}{\gamma}t'_1 - \frac{v}{c} \cdot \frac{x}{c}$$

なので、 τ' に対応するS系での時間間隔 $\tau \equiv t_2 - t_1$ は

$$\tau \equiv t_2 - t_1 = \frac{1}{\gamma}(t'_2 - t'_1) = \frac{\tau'}{\gamma}$$

です。つまり二つの系で時間間隔が異なる。(4.19)を考慮すると、時計が移動して見えるS系での時間間隔 $\tau \equiv t_2 - t_1$ は、時計が固定されているS'系での時間間隔 $\tau' \equiv t'_2 - t'_1$ の $1/\gamma \leq 1$ 倍です。このことを時計の遅れあるいは寿命の延びという。逆ローレンツ変換でも同じです。寿命は時計が固定されている慣性系で最小です。この最小の時間間隔は固有時間間隔とも呼ばれている。

炉心溶融した原子炉やピラミッドや火山の内部を透視する目的で使われるようになったミュー粒子は宇宙線 (cosmic ray) の仲間です。宇宙線は高エネルギーの一次宇宙線と低エネルギーの二次宇宙線とに大別される。地球大気内に高エネルギーの一次宇宙線が入射すると空気シャワー現象で多くの二次宇宙線が発生する。寿命の短いものはすぐに崩壊するが、寿命の長い粒子は地上でも観測できる。地上で観測される二次宇宙線の多くはミュー粒子です。

静止状態のミュー粒子は電子とニュートリノに平均寿命 (崩壊の時定数) $2.15 \mu\text{s}$ で崩壊する。光速は約30万km/sなので、 $2.15 \mu\text{s}$ の間に光が進む距離は約600mスカイツリーの高さ程度です。運動しているミュー粒子の平均寿命は静止状態の γ 倍になる。ミュー粒子の速度は光速に近く $\gamma \sim 10$ と見積もられているので、地上で検出されるミュー粒子には高度6km程度の上空で発生したものも含まれることになる。

ローレンツ収縮も寿命の延びも、光速不変であるような座標変換 (ローレンツ変換) の結果です。既に述べたように、電磁気学を使うと、ローレンツ変換に対して電荷も不変となる。

5.3 特殊相対性理論

周知のように、ニュートン力学には運動の三法則がある。運動の第一法則は「慣性系では力が作用しない物体は等速直線運動する」との経験則です。「作用反作用の法則」とも呼ばれる運動の第三法則も経験則です。運動状態は運動量を意味するので、第一法則と第三法則はいずれも運動量保存則の現れです。運動の第二法則は、物体の運動状態の時間変化は、物体に作用する力に比例し、その方向が運動状態の時間変化と同じであることを主張する。運動の第二法則はむしろ力の定義です。物体の運動量を観測すると物体に働いている力が判る。万有引力とその逆二乗則は第二法則に基づいて発見された。

アインシュタイン (A.Einstein、1879-1955年) の相対性原理は物理法則は全ての慣性系で同じであることを主張する。この主張は実験事実から帰納されたものではない。むしろ論理的美しさが基本になっている。既に述べたように、電磁気現象に適した座標変換は、ガリレイ変換では無くて、ローレンツ変換です。このために、アインシュタインの相対性原理は「全ての物理法則はローレンツ変換に対して不変である」ことを主張する。

ニュートン力学ではガリレイ変換に対して不変なので、全ての物体や空間に共通の時間が暗黙裏に仮定されている。このために、ニュートン力学では絶対時間と絶対静止系とが必要で。初期には、地動説のように太陽は絶対静止系に固定されていると考え、後に、銀河系の中で太陽が運動していることが判ると銀河系の中心が絶対静止系に固定されていると考えたりした。

相対性原理に基づく力学がアインシュタインの特殊相対性理論 (1905年) です。特殊相対性理論はニュートン力学の絶対静止系と絶対時間とを不要にした。アインシュタインにとって子供の頃に磁石で遊んだ経験が特殊相対性理論の出発点だったらしい。

電磁気学現象がローレンツ変換に対して不変であることに着目したアインシュタインは、古典的極限 $|v/c| \ll 1$ でニュートン力学の運動量や運動エネルギーと一致するように、ニュートン力学を拡張して特殊相対性理論を作り上げた¹⁰。

¹⁰ 物理学史研究刊行会編『物理学古典論文叢書4 相対論』（東海大学出版会、1969）

アインシュタインの特殊相対性理論では、静止質量 m と静止エネルギー $E \equiv mc^2$ を導入し、ローレンツ変換により、静止質量が γ 倍になるとする。静止エネルギーの記号 E は電場の記号と重複しているが別物です。 γ はローレンツ因子です。

静止質量 m の粒子が速度 v で動いているとその運動量 \mathbf{p} は、

$$\mathbf{p} \equiv \gamma m \mathbf{v}$$

であり。速度 v で動いている静止質量 m 物体のエネルギーは γE に等しいので、運動エネルギーは γE と静止エネルギー E との差

$$\gamma E - E = (\gamma - 1)E$$

です。

古典的極限 $v/c \rightarrow 1$ では、 $\gamma \rightarrow 1$ なので、運動量 \mathbf{p} の古典的極限はニュートン力学の $m\mathbf{v}$ と一致する。

また、古典的極限 $|v/c| \ll 1$ では、

$$\gamma - 1 \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \geq 0 \quad (4.25)$$

に注意すると、運動エネルギーの古典的極限は

$$(\gamma - 1)E \simeq \frac{1}{2} m v^2$$

となり、ニュートン力学の運動エネルギーと一致する。

特殊相対性理論で静止質量 m をエネルギーの一形態と認識したことは重要です。静止質量が Δm だけ減少すると、エネルギー保存則により、静止エネルギーの変化 $\Delta E = \Delta m c^2$ だけ熱エネルギーが増加する。

原子量の大きい原子核には不安定なモノがあり、原子核崩壊して静止質量が減少することがある。原子爆弾は原子核崩壊に伴う静止質量の減少分に相当するエネルギーを熱エネルギーとして放出する。原子力発電は原子核崩壊に伴う静止質量の減少分に相当する熱エネルギーを使って発電する。

逆に、原子量の小さい原子核を融合させる核融合でも静止質量が減少することがある。太陽では核融合反応に伴う静止質量の減少分に相当するエネルギーが太陽の熱源になっている。水素爆弾では、原子核崩壊に伴う熱エネルギーを使って、核融合反応も生じさせている。

制御された核融合反応が地上でも可能になれば電気エネルギーを取り出すことができるだろう。しかし、現在のところ核融合反応が生じるような状況を作り出すた

めに投入するエネルギーのほうが、核融合反応により取り出された電気エネルギーよりも遙かに大きい。

静止質量をエネルギーの形態として認めた結果、人類は、化石燃料だけでなく、核エネルギーまでエネルギー源として使用するようになった。人類が使うエネルギー源が増えたのでエネルギー消費も増大した。エネルギー消費はエントロピー生成を増大させる。

地球上でのエントロピー生成が異常に大きくなっても、生成されたエントロピーは温度3Kの宇宙空間に向かって黒体放射の形で捨てるしかない。エントロピーを廃棄する手だてが他にないのだから、人類は地球の温暖化に向かって努力していることになる。

初稿 2020年12月1日（火）

修正二稿 2022年9月12日（土）

修正三稿 2023年6月29日（木）